UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s3nouvellesannal14pari

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1895.

ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE ET AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME QUATORZIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

(Tous droits réservés.)

38292
19/11/96.

QA
1
N8
v. 54

65 2

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR LA DÉFINITION DES MASSES ET DES FORCES [1];

PAR M. VASCHY.

I. — PRINCIPES FONDAMENTAUX ACTUELS DE LA DYNAMIQUE.

Dans l'enseignement actuel de la Mécanique rationnelle, la Dynamique est fondée sur les principes suivants :

1° Principe de l'inertie;

2° Principe de l'indépendance du mouvement acquis et des effets simultanés des forces;

3° Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

L'énoncé de ces principes n'est précédé d'aucune définition précise de la force. En réalité, ce sont ces principes mêmes qui, traduits sous une forme mathématique, lui servent purement et simplement de définition.

Cette manière d'introduire la notion de force *a priori* nous semble offrir le danger de suggérer aux élèves

---

[1] M. Fouret, à qui j'ai montré cette Note, m'a dit que, dans une Communication orale faite il y a quelques années à la Société philomathique, il a émis des idées analogues à celles que je présente. N'ayant point l'intention de reprendre cette question actuellement, il m'a engagé à l'exposer moi-même aux lecteurs des *Nouvelles Annales*.

l'idée que ce que l'on définit, c'est la *cause réelle* du mouvement dont l'étude au contraire n'intéresse nullement la Mécanique rationnelle. Mais un autre inconvénient bien plus grave est la lacune que nous allons signaler et qui existe dans les meilleurs traités.

Tout ce que l'on déduit des deux premiers principes se résume dans la définition de la force f qui imprime une accélération w à un point matériel A, *toujours le même;* on a, en grandeur et en direction, l'égalité

$$\overline{f} = m\overline{w},$$

le coefficient m étant choisi arbitrairement une fois pour toutes. Pour définir la force $\overline{f'}$ qui imprime à un autre point A′ une accélération w', on écrirait de même

$$\overline{f'} = m'\overline{w'},$$

m' désignant un nouveau coefficient aussi arbitraire que m. Tant qu'on s'en tient aux deux premiers principes, les coefficients m et m' étant arbitraires, le rapport des deux forces précédentes f et f' *n'a donc aucun sens.*

Pour définir par la formule

$$\frac{f}{f'} = \frac{m}{m'}\,\frac{w}{w'}$$

le rapport des masses m et m' des points A et A′, comme on le fait ordinairement, il serait donc nécessaire de définir préalablement le rapport des deux forces f et f', appliquées à deux points matériels différents, avec autant de précision que l'on en a mis à définir le rapport de deux forces appliquées à un même point. *C'est ce que l'on ne fait pas;* on suppose sans doute implicitement, sans aucune explication, que le rapport $\frac{f}{f'}$ ci-

dessus est *bien défini en lui-même,* ce qui est insuffisant.

Cette lacune, il est vrai, se trouve comblée plus tard, dans l'étude des systèmes de points matériels, par cela même que l'on invoque le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Elle n'en subsiste pas moins, au début, dans la définition des forces et des masses; et, pour la faire disparaître, il y aurait lieu de modifier l'exposé des principes de la Dynamique.

Nous nous proposons de montrer qu'il serait bien plus naturel de commencer par définir la notion de masse, qui nous est fournie par l'expérience d'une manière très nette. La définition de la force ne soulèverait ensuite aucune difficulté.

II. — Loi de Newton.

Rappelons d'abord les résultats d'une étude plus importante que l'on fait généralement comme application de la *Cinématique*. On sait comment Newton a déduit des lois approchées de Képler cette conséquence que l'accélération w d'une planète est dirigée vers le centre du Soleil, et est inversement proportionnelle au carré de sa distance r à ce centre :

$$w = \frac{M}{r^2}.$$

La constante M a la même valeur pour toutes les planètes.

Attribuant cette action à la présence du Soleil, Newton a été conduit à généraliser la loi précédente et à admettre que la présence de chaque planète P_1 a pour effet de contribuer à l'accélération d'une autre planète quelconque P_2 par une composante $\overline{w_{21}}$ dirigée de P_2

vers P_1 et ayant une grandeur égale à $\frac{m_1}{r_{12}^2}$; r_{12} désigne la distance de P_2 à P_1, et m_1 un coefficient qui dépend de la planète influençante P_1, mais non de la planète influencée P_2. Pour la même raison, P_1 doit subir, sous l'influence de P_2, une accélération $\overline{w_{12}}$ opposée à la précédente et égale à $\frac{m_2}{r_{12}^2}$.

Cette loi a subi l'épreuve de nombreuses vérifications expérimentales, consistant à comparer les résultats de la théorie fondée sur elle aux résultats de l'observation du mouvement des astres; et on la considère comme parfaitement établie.

Des formules de w_{12} et de w_{21}, on déduit

$$m_1 w_{12} = m_2 w_{21} = \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2},$$

ou bien, en tenant compte des sens opposés des deux accélérations, et désignant par la notation $\overline{w}$ une accélération considérée comme vecteur

$$m_1 \overline{w_{12}} + m_2 \overline{w_{21}} = 0.$$

Ce résultat, indépendant de la loi de l'inverse du carré de la distance, peut s'énoncer ainsi : « L'accélération d'une planète P_1 sous l'action d'une planète P_2, et l'accélération de P_2 sous l'action de P_1 sont dirigées suivant la même droite en sens opposés; en outre, elles ont entre elles un rapport constant $\frac{m_2}{m_1}$, qui est l'inverse du rapport des *coefficients d'influence* de P_1 et de P_2. »

Cette loi astronomique a été étendue par Newton à l'action réciproque de deux corps quelconques agissant l'un sur l'autre, soit à distance (cas de deux astres), soit au contact (cas de deux corps liés l'un à l'autre, cas

de deux corps qui se choquent). Elle n'a jamais été mise en défaut et paraît être d'une rigueur absolue.

Ces résultats étant acquis, il suffira, pour entrer dans le domaine de la Dynamique, de poser le principe et les définitions qui suivent.

III. — Principe fondamental et définitions de la Dynamique.

On admet, comme principe fondamental de la Dynamique, la loi de Newton qui, dans le cas d'un couple de deux points matériels, s'énonce de la manière suivante :

Si un point matériel A_1 *acquiert, sous l'action d'un point* A_2, *une accélération* w_{12}, *réciproquement* A_2 *acquiert, sous l'action de* A_1, *une accélération* w_{21} ; *ces deux accélérations sont opposées suivant une même droite (joignant* A_1 *et* A_2*) et liées par la relation*

$$m_1 \overline{w_{12}} + m_2 \overline{w_{21}} = 0, \tag{1}$$

m_1 *et* m_2 *désignant deux coefficients d'influence propres aux points* A_1 *et* A_2 *respectivement.*

Définition des masses. — Ainsi les divers points matériels A_1, A_2, A_3, ... ont des coefficients propres m_1, m_2, m_3, ..., dont les rapports deux à deux sont parfaitement déterminés en vertu de cette loi, l'un deux, m_1 par exemple, pouvant être choisi arbitrairement. On donne à ces coefficients le nom de *masses*. Les masses des divers points matériels sont donc leurs coefficients d'influence respectifs au point de vue des actions qu'ils exercent sur d'autres points matériels.

L'application directe du principe de Newton, résumé

par la formule (1), ne saurait fournir un procédé pratique de comparaison des masses entre elles (sauf en Astronomie). Mais ce principe, qui est la base de la théorie des systèmes de points matériels soumis à des liaisons, notamment de la statique et de la dynamique des corps solides, permet d'établir les propriétés des instruments destinés à la mesure des poids ou des masses (levier, etc).

Définition des forces. — Définissons maintenant la grandeur et la direction d'une force $\overline{f}$, qui *imprime* une accélération $\overline{w}$ à un point matériel A de masse m, par la formule

$$\overline{f} = m\overline{w}.$$

On pourra alors exprimer la relation (1) en disant que *la force* $m_1\overline{w_{12}} = \overline{f_{12}}$ *exercée par le point matériel* A_2 *sur le point* A_1 *est égale et opposée à la force* $m_2\overline{w_{21}} = \overline{f_{21}}$ *exercée par le point* A_1 *sur le point* A_2. C'est là l'énoncé ordinaire du principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

REMARQUE SUR LA SURFACE DONT TOUS LES POINTS SONT DES OMBILICS;

PAR M. C. BOURLET,
Docteur ès Sciences mathématiques.

En désignant, comme de coutume, par p, q, r, s, t les dérivées partielles de la fonction z de x et y, on sait que la surface dont tous les points sont des ombilics satis-

fait le système d'équations simultanées

$$(1) \qquad \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

On démontre, ordinairement, que la sphère est la seule surface vérifiant ce système par un procédé très simple mais peu naturel (*voir*, par exemple, le *Cours* de Serret). Il est facile de voir que cette proposition importante s'établit *directement* sans difficulté en s'appuyant sur une propriété générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles simultanées que j'ai établie ailleurs. J'ai montré en effet (voir *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1891, Supp.) que lorsque, d'un système d'équations aux dérivées partielles, on peut tirer, par dérivations, toutes les dérivées d'un certain ordre de la fonction inconnue en fonction des dérivées d'ordre inférieur, l'intégrale générale de ce système ne contient qu'un nombre *fini* de constantes arbitraires dont on peut déterminer le nombre à l'avance et que, de plus, on peut ramener l'intégration de ce système à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Or, si l'on écrit le système (1) sous la forme équivalente

$$(2) \qquad \begin{cases} r = \dfrac{1+p^2}{1+q^2}\, t, \\ s = \dfrac{pq}{1+q^2}\, t, \end{cases}$$

on en tire, facilement, par dérivations, et en tenant compte de la condition

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x},$$

toutes les dérivées du troisième ordre de z en fonction

de p, q et t :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{3p(1+p^2)}{(1+q^2)^2}t^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{q+3qp^2}{(1+q^2)^2}t^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{p+3pq^2}{(1+q^2)^2}t^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{3q}{1+q^2}t^2.$$

Cela nous prouve, d'après les propositions que j'ai rappelées, que l'intégrale générale du système (1) ou (2) ne dépend que d'un nombre *fini* de constantes arbitraires et le nombre de ces constantes est *quatre*, car on peut prendre, arbitrairement, les valeurs initiales de z, p, q et t. Or la sphère

$$z = c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$$

est, manifestement, une surface répondant à la question, qui contient *quatre* constantes arbitraires a, b, c et R; donc c'est *la seule*.

Remarque. — En suivant la marche que j'ai indiquée (*loc. cit.*), on voit qu'on est ramené à intégrer le système *complètement intégrable* suivant :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x} = p, & &\frac{\partial z}{\partial y} = q,\\ &\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1+p^2}{1+q^2}t, & &\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{pq}{1+q^2}t,\\ &\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{pq}{1+q^2}t, & &\frac{\partial q}{\partial y} = t,\\ &\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{p+3pq^2}{(1+q^2)^2}t^2. & &\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{3qt^2}{1+q^2}, \end{aligned}\right.$$

qui donne z, p, q et t. r et s sont fournis, ensuite, par

les relations (2). En faisant le changement de variables de Du Bois-Reymond

$$x = u, \quad y = uv,$$

on est ramené à intégrer le système d'équations différentielles ordinaires

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = p + qv, \\ \dfrac{\partial p}{\partial u} = \dfrac{1 + p^2 + pqv}{1 + q^2}\, t, \\ \dfrac{\partial q}{\partial u} = \dfrac{pq + (1 + q^2)v}{1 + q^2}\, t, \\ \dfrac{\partial t}{\partial u} = \dfrac{p + 3\,pq^2 + 3\,(1 + q^2)\,qv}{(1 + q^2)^2}\, t^2, \end{cases}$$

où u est la variable et v un paramètre arbitraire. L'intégrale générale de ce système (4) est, alors,

$$(5) \quad \begin{cases} z = c + \sqrt{R^2 - (u - a)^2 - (uv - b)^2}, \\ p = \dfrac{-(u - a)}{\sqrt{R^2 - (u - a)^2 - (uv - b)^2}}, \\ q = \dfrac{-(uv - b)}{\sqrt{R^2 - (u - a)^2 - (uv - b)^2}}, \\ t = \dfrac{(u - a)^2 - R^2}{[R^2 - (u - a)^2 - (uv - b)^2]^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

où a, b, c, R sont *quatre* constantes d'intégration.

En remontant aux anciennes variables x et y, on trouve bien pour z

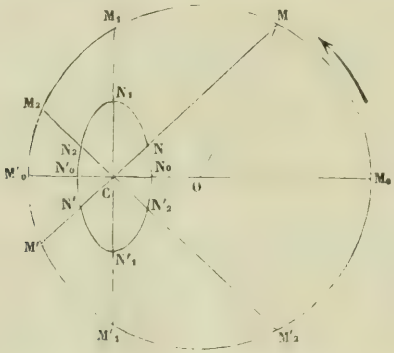
$$z = c + \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2};$$

ce qui donne la sphère.

NOTE ÉCLAIRCISSANT LA DÉFINITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES D'APRÈS G.-H. HALPHEN [1];

PAR M. VLADIMIR VARICAK,
Professeur à l'École réale, à Osijek (Esseg), en Croatie.

1. La représentation des arguments des fonctions elliptiques par les arcs de l'ellipse, de l'hyperbole ou de certaines autres courbes est bien connue, mais on peut les représenter aussi par les secteurs d'une courbe dont la génération est, d'après Halphen, la suivante : soient un cercle et un point C intérieur à ce cercle. Par le



point C, on mène la corde MM′ du cercle et l'on porte sur elle à partir du point C, de part et d'autre, une longueur inversement proportionnelle à la racine carrée de la corde, c'est-à-dire on fait

$$CN = l\sqrt{\frac{2(R+\delta)}{MM'}}.$$

[1] *Traité des fonctions elliptiques*, Paris, 1886, t. I, p. 1.

Quand on effectue cela sur chaque corde qu'on peut faire passer par le point C, on obtient la courbe en question, comme le lieu des extrémités des rayons vecteurs ainsi obtenus. Dans l'expression précédente, R est le rayon du cercle, δ la distance du point C au centre de ce cercle et l une longueur arbitraire qui n'affecte pas la nature de la courbe. Pour fixer les idées, on peut prendre le rayon du cercle pour unité linéaire et l'on a alors

$$(1) \qquad CN = \sqrt{R\,\frac{2R(R+\delta)}{MM'}}.$$

La valeur de la fraction sous le signe du radical peut être construite comme la quatrième proportionnelle à trois droites et l'on obtient enfin CN comme la moyenne géométrique. Par ce procédé, on obtiendrait une courbe convexe, de symétrie bilatérale. C'est une courbe du quatrième degré, dont nous allons trouver l'équation.

2. Soit C l'origine des coordonnées. Les abscisses des points M et M', dans lesquelles la corde $y = ax$ coupe le cercle

$$(x-\delta)^2 + y^2 = R,$$

sont données par l'équation

$$x_{1,2} = \frac{\delta \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - a^2\delta^2}}{1+a^2}.$$

En posant $\alpha = \text{arc tang}\, a$ on a, pour les segments CM et CM' de la corde MM',

$$CM = x_1 \sec\alpha = x_1\sqrt{1+a^2},$$

$$CM' = x_2 \sec(\pi - \alpha) = -x_2\sqrt{1+a^2},$$

ou

$$CM = \frac{\delta + \sqrt{R^2(1+a^2) - a^2\delta^2}}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$CM' = -\frac{\delta - \sqrt{R^2(1+a^2) - a^2\delta^2}}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Si l'on additionne ces deux expressions, on a

$$MM' = 2\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{1+a^2}\delta^2}$$

ou

$$MM' = 2\sqrt{R^2 - \delta^2 \sin^2\alpha}.$$

Après avoir déterminé la longueur de la corde MM', on a pour le rayon vecteur

$$CN = R\sqrt{\frac{R+\delta}{\sqrt{R^2 - \delta^2 \sin^2\alpha}}}.$$

Posons $CN = \rho$, il s'ensuit l'équation polaire de la courbe (C),

$$(2) \qquad \rho^2 = \frac{R^2(R+\delta)}{\sqrt{R^2 - \delta^2 \sin^2\alpha}}$$

ou, dans le système des coordonnées rectangulaires,

$$(3) \qquad (x^2+y^2)^2 - \frac{\delta^2}{R^2}(x^2+y^2)y^2 = R^4\left(1+\frac{\delta}{R}\right)^2.$$

3. Dans l'Ouvrage déjà cité de Halphen, on désigne par u le rapport de l'aire d'un secteur de la courbe (C) au carré l^2 resp. R^2. Effectuant la quadrature de la courbe dans le système des coordonnées polaires, on a, pour la mesure du double secteur,

$$(4) \qquad u = 2\int_0^\alpha \frac{(R+\delta)\,d\alpha}{\sqrt{R^2 - \delta^2 \sin^2\alpha}}.$$

La valeur de cette intégrale dépend de la limite supérieure; u et α sont fonctions l'un de l'autre : α est l'amplitude de u. Halphen nomme ainsi un autre angle, mais nous croyons que la dépendance de ces deux grandeurs est plus directe. Nous avons pris d'ailleurs pour u

la mesure de l'aire du double secteur, parce que cela répond à la définition de l'argument des fonctions circulaires et hyperboliques, dans le système absolu.

Le sinus et le cosinus de l'angle α, ou de l'amplitude de u sont les fonctions elliptiques principales. Géométriquement on les peut représenter par l'ordonnée et l'abscisse du point N situé sur la courbe (C) et dont le rayon vecteur fait l'angle α avec l'axe des x.

4. Quant au module, Halphen le représente par l'excentricité de la courbe (C), et dit que sa valeur numérique est

$$k = \frac{2\sqrt{R\delta}}{R+\delta}.$$

Mais on chercherait en vain la déduction de cette formule selon la définition citée. En effet, par l'excentricité de la courbe (C) on ne peut entendre autre chose que le rapport $\delta : R$ et c'est précisément le module qu'on doit supposer renfermé dans les expressions $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{cn} u$ quand u est donné par (4). Du reste, il est facile de ramener ces modules l'un à l'autre. Module $\frac{\delta}{R}$ est le premier et $\frac{2\sqrt{R\delta}}{R+\delta}$ le second terme dans l'échelle des modules, qui sont liés entre eux par la relation connue

$$k_{i+1} = \frac{2\sqrt{k_i}}{1+k_i}.$$

On voit donc que le module cité par Halphen est déduit du module primitif $\frac{\delta}{R}$, qui correspond à l'excentricité de la courbe (C).

Le changement du module entraîne nécessairement le changement de l'amplitude d'une manière bien con-

nue [1]. L'équation (4) peut être écrite

$$u = \frac{2(R+\delta)}{R} \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{R^2}\sin^2\alpha}}$$

et elle prend, quand on change convenablement [1] le module et l'amplitude, la forme nouvelle

$$u = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}},$$

où k signifie le module de Halphen $\frac{2\sqrt{R\delta}}{R+\delta}$. Le résultat obtenu établit l'harmonie parfaite entre le procédé de Halphen et celui des autres géomètres.

5. Pour les arguments purement imaginaires, on peut établir une représentation géométrique analogue.

La conjuguée imaginaire (C′) à abscisses réelles de la courbe (C) est

$$(x^2 - y^2)^2 + \frac{\delta^2}{R^2}(x^2 - y^2)y^2 = R^4\left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^2.$$

Cette équation se déduit de (3) en y remplacant y par $y\sqrt{-1}$. On peut la réduire, au moyen des fonctions hyperboliques, à la forme

$$(5) \qquad \rho^2 = \frac{R^2(R+\delta)}{\sqrt{R^2 + \delta^2 \operatorname{sh}^2\alpha}},$$

en posant $x = \rho \operatorname{ch}\alpha$, $y = \rho \operatorname{sh}\alpha$. L'équation (2) se transforme aussi en (5) par la substitution de $\alpha\sqrt{-1}$ à α, et c'est, comme l'on sait, la manière de trouver la conjuguée imaginaire de la courbe réelle, quand son équa-

---

[1] Voir J.-A. Serret, *Cours de Calcul différentiel*, etc., 1886, t. II, p. 245.

tion est donnée en coordonnées polaires [1]. Par les secteurs de cette courbe, qui a le type d'une hyperbole, seront représentés les arguments imaginaires des fonctions elliptiques. On a pour la mesure du double secteur, qui est limité par le rayon vecteur tracé sous l'angle α, l'arc de la courbe (C′) et l'axe des x,

$$u' = 2\int_0^{\alpha} \frac{(R+\delta)\,d\alpha}{\sqrt{R^2+\delta^2\,\mathrm{sh}^2\alpha}}.$$

Évidemment il est

$$\int_0^{i\alpha} \frac{(R+\delta)\,d\alpha}{\sqrt{R^2+\delta^2\,\mathrm{sh}^2\alpha}} = \int_0^{\alpha} \frac{(R+\delta)\,di\alpha}{\sqrt{R^2+\delta^2\,\mathrm{sh}^2 i\alpha}},$$

et, comme $\mathrm{sh}\,i\alpha = i\sin\alpha$,

$$\int_0^{i\alpha} \frac{(R+\delta)\,d\alpha}{\sqrt{R^2+\delta^2\,\mathrm{sh}^2\alpha}} = i\int_0^{\alpha} \frac{(R+\delta)\,d\alpha}{\sqrt{R^2-\delta^2\sin^2\alpha}},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{am}\,iu' = i\,\mathrm{am}\,u$$

et réciproquement

$$i\,\mathrm{am}\,u' = \mathrm{am}\,iu.$$

Avec l'argument imaginaire, il faut lier le module complémentaire. Pour la troisième fonction elliptique, on a

$$\mathrm{dn}\,iu' = \sqrt{R^2+\delta^2\,\mathrm{sh}^2\alpha} = \sqrt{R^2+\delta^2\tan^2 i\alpha}$$
$$= \frac{\sqrt{R^2-(R^2-\delta^2)\sin^2 i\alpha}}{\cos i\alpha},$$

ou

$$\mathrm{dn}\,iu' = \frac{\mathrm{dn}\,u'}{\mathrm{cn}\,u},$$

$i\alpha$ étant $\mathrm{am}\,u'$.

Il faut se rappeler encore les relations qui existent entre les fonctions hyperboliques et circulaires, et l'on

---

[1] *Voir* M. Marie, *Théorie des fonctions de variables imaginaires*, t. I, p. 268, Paris, 1874.

pourra aussitôt écrire les équations suivantes

$$\operatorname{sn}(iu, k) = \sin \operatorname{am}(iu, k) = \sin i \operatorname{am}(u', k') = i \operatorname{sh} \operatorname{am}(u', k')$$
$$= i \operatorname{tang} \operatorname{am}(u, k') = i \frac{\sin \operatorname{am}(u, k')}{\cos \operatorname{am}(u, k')},$$
$$\operatorname{cn}(iu, k) = \cos \operatorname{am}(iu, k) = \cos i \operatorname{am}(u', k') = \operatorname{ch} \operatorname{am}(u', k')$$
$$= \frac{1}{\cos \operatorname{am}(u, k')},$$

ou enfin

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i \frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')},$$
$$\operatorname{cn}(iu, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')}.$$

Remarque. — L'interprétation de la dégénérescence des fonctions elliptiques est maintenant très facile. Pour $\delta = 0$, la courbe (C) se réduit au cercle et la courbe (C′) à une hyperbole équilatère. Alors le module k se réduit à zéro, et le module k' à l'unité.

DÉMONSTRATION NOUVELLE DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE DE COURBURE CONSTANTE NÉGATIVE;

PAR M. H. KAGAN, à Saint-Pétersbourg.

La démonstration des formules trigonométriques et de l'équation fondamentale de la Géométrie de Lobatchefsky, que j'ai l'honneur de présenter, comparée aux autres qui me sont connues, me paraît avoir l'avantage de déduire toute la théorie avec beaucoup de simplicité d'un seul théorème fondamental. Cette démonstration est fondée sur les principes suivants, qui se trouvent énoncés et démontrés dans toute exposition de la Géométrie de l'espace hyperbolique.

1. Une droite parallèle à une autre fait en chaque point, avec la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'autre droite du côté du parallélisme, un angle aigu (ω), variable avec la distance ($\varkappa$) de ce point à l'autre parallèle. Nous allons exprimer cette dépendance par l'équation

$$\omega = \Pi(\varkappa) \qquad \text{ou} \qquad \varkappa = \Phi(\omega)$$

(selon Lobatcheffsky). Tout angle aigu peut être considéré comme un angle de parallélisme.

2. Les deux côtés BA et BC d'un angle ABC étant parallèles aux côtés B′A′ et B′C′ d'un autre angle A′B′C′, qui est placé dans un autre plan, les deux plans se coupent et la droite d'intersection est parallèle aux droites BA et B′A′ dans une direction et aux deux autres BC et B′C′ dans la direction opposée.

3. La trajectoire orthogonale d'un système de parallèles, qui se trouvent dans un même plan, est une ligne courbe, que l'on appelle *cercle limite*. Elle jouit de la propriété fondamentale que chaque axe (c'est-à-dire l'une des parallèles qui coupent la courbe orthogonalement), qui passe par le milieu d'une corde, est perpendiculaire à cette droite et divise aussi l'arc en parties égales. La longueur d'un arc limite est parfaitement définie par sa corde.

4. La trajectoire orthogonale d'un système de parallèles dans l'espace est une surface courbe, nommée *sphère limite*, qui peut être produite par la révolution du cercle limite autour d'un de ses axes. L'intersection de cette surface avec un plan, qui contient un axe, est un cercle limite, avec tout autre plan, un cercle.

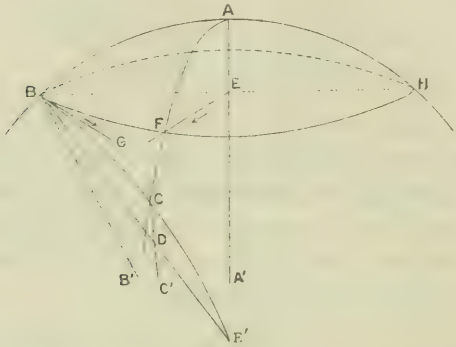
5. La Géométrie de la sphère limite est celle d'Eu-

clide. Les lignes géodésiques de cette surface sont des cercles limites.

Nous allons maintenant démontrer le théorème fondamental dont nous avons fait mention ci-dessus.

Soient AA′ et BB′ (*fig.* 1) deux axes d'une sphère

Fig. 1.



limite et AB un arc d'un cercle limite, qui est posé sur cette surface. Par le point B, menons un plan perpendiculaire à la droite AA′. Le cercle d'intersection de ce plan avec la sphère limite donnée peut être considéré comme un cercle plan, dont le centre est en E, ou bien comme un cercle géodésique, dont le rayon est BA et le centre se trouve en A. Menons la tangente rectiligne à ce cercle BG et la tangente géodésique BC. Toutes les deux se trouvent dans le même plan, qui contient l'axe BB′ et qui est perpendiculaire au plan des axes AA′ et BB′. Soit EF parallèle à BG. L'intersection de la surface avec le plan FEA′ est un cercle limite AC. Nous allons démontrer que les arcs AC et BC se coupent en un point C et que la longueur de l'arc BC est constante, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la longueur AB.

En effet, comme EF || BG et EA′ || BB′, les plans B′BG

et A'EF se coupent (*voir* n° 2) et la droite d'intersection CC' est parallèle à BB' et à BG. Le point C, où l'axe CC' rencontre la surface, appartient aux deux cercles limites AC et BC. En outre, la perpendiculaire, abaissée de B sur la droite CC', divise l'angle droit B'BG par moitié. Donc (*voir* n° 1)

$$< GBD = 45^\circ \qquad \text{et} \qquad BD = \Phi(45^\circ).$$

Si nous prolongeons la droite BD jusqu'à la seconde rencontre avec le cercle limite en E', la corde $BE' = 2\,BD$ aura une longueur constante; donc, l'arc $BC = \frac{1}{2}\,BE'$ a aussi une longueur constante, que nous désignons par l (*voir* n° 3). Le triangle géodésique ABC étant rectangle, on trouve, selon le n° 5,

$$AB = l \cot A.$$

Or, l'angle géodésique A a la même mesure que l'angle rectiligne BEF. D'autre part, BG étant perpendiculaire à BE, $< BEF = \Pi(BE)$. Donc, désignant la longueur de l'arc AB par s et le rayon BE par ρ, on trouve

$$\text{(I)} \qquad s = l \cot \Pi(\rho).$$

Cette équation détermine la longueur d'un arc de cercle limite en fonction de la perpendiculaire abaissée d'une extrémité de cet arc sur l'axe qui passe par l'autre extrémité.

En posant encore arc $BAH = 2s = \sigma$ et $BH = \lambda$, on trouve l'équation

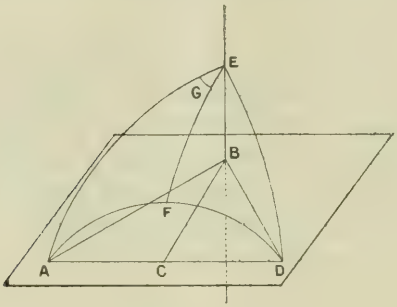
$$\text{(II)} \qquad \sigma = 2\,l \cot \Pi\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

qui constitue la dépendance entre la longueur d'un arc limite (σ) et la corde (λ).

Pour développer la trigonométrie plane de ces formules, considérons un triangle rectangle (*fig.* 2) ABC.

dont l'hypoténuse soit désignée par c, et les cathètes par a et b. Prolongeons AC à une distance CD = AC et menons la droite BD. Prenons ensuite la perpendiculaire EB au plan du triangle pour axe et construisons la

Fig. 2.



sphère limite qui passe par le point A. Le point D se trouvera aussi sur cette surface, parce que la révolution autour de l'axe EB y amène le point A.

Soit E le point de rencontre de la surface avec l'axe EB. Le triangle géodésique AED étant équilatère, l'arc limite EF, qui passe par le milieu F de AD, fait un angle droit avec AF. Donc

$$AF = AE \sin\varphi,$$

φ désignant l'angle géodésique AEF dont la mesure est égale à celle de l'angle rectiligne ABC.

Or, selon les équations (I) et (II),

$$AE = l \cot\Pi(c), \qquad AF = \tfrac{1}{2} AD = l \cot\Pi(b);$$

donc

$$\text{(III)} \qquad \cot\Pi(b) = \cot\Pi(c) \sin B,$$

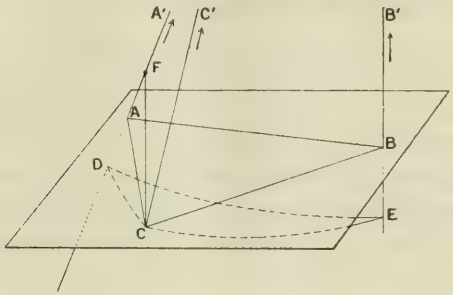
et, par analogie,

$$\text{(IV)} \qquad \cot\Pi(a) = \cot\Pi(c) \sin A.$$

Pour trouver la troisième équation, construisons de

nouveau une sphère limite, mais qui passe maintenant par le sommet C (*fig.* 3) de l'angle droit; pour axe

Fig. 3.



nous conservons la perpendiculaire BB′ au plan du triangle. Le triangle géodésique DEC est rectangle, parce que le plan ACC′, contenant la droite AC, est perpendiculaire au plan C′CB; donc

$$DC = CE \operatorname{tang} E.$$

Mais, l'angle géodésique E ayant la même mesure que l'angle rectiligne B, l'équation précédente devient, selon la formule (I),

$$\cot \Pi(p) = \cot \Pi(a) \operatorname{tang} B,$$

où p signifie la perpendiculaire CF abaissée du sommet C sur la parallèle AA′. Or, l'angle A′AC étant égal à $\Pi(b)$, l'équation (III), appliquée au triangle ACD, nous donne

$$\cot \Pi(p) = \cos \Pi(b),$$

et, après la substitution à l'équation précédente,

$$\text{(V)} \qquad \cos \Pi(b) = \cot \Pi(a) \operatorname{tang} B.$$

Les trois équations (III), (IV) et (V) déterminent toute la trigonométrie rectiligne. Pour en déduire

toutes les dix équations du triangle rectangle, il ne faut qu'un procédé analytique d'élimination, que nous laissons au lecteur. Nous ne ferons mention que d'une seule équation, dont nous aurons besoin :

$$\text{(VI)} \qquad \cos\Pi(a) = \cos\Pi(c)\cos B.$$

On l'obtient très facilement en éliminant l'angle $\Pi(b)$ entre les équations (V) et (III).

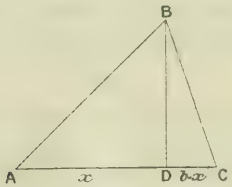
Pour passer au triangle obliquangle, menons la hauteur $BD = h$ du triangle ABC (*fig.* 4). Selon l'équation (III), nous tirons des triangles rectangles ABD et CBD

$$\cot\Pi(h) = \cot\Pi(c)\sin A,$$
$$\cot\Pi(h) = \cot\Pi(a)\sin C.$$

En éliminant $\cot\Pi(h)$ entre ces équations, nous trouvons

$$\text{(VII)} \qquad \frac{\cot\Pi(a)}{\sin A} = \frac{\cot\Pi(c)}{\sin C} = \frac{\cot\Pi(b)}{\sin B}.$$

Fig. 4.



La troisième partie de cette équation est adjointe par analogie bien légitime.

En désignant le segment AD par x, nous tirons des mêmes triangles rectangles (VI)

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} \cos\Pi(x) = \cos\Pi(c)\cos A, \\ \cos\Pi(b-x) = \cos\Pi(a)\cos C. \end{cases}$$

Pour trouver la troisième relation entre les angles et les côtés d'un triangle obliquangle, il ne faut qu'élimi-

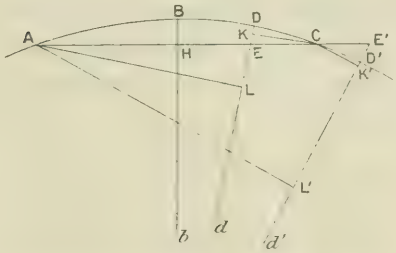
ner x entre les équations (VIII). Mais cette élimination n'est pas si simple, parce que ce n'est plus l'angle $\Pi(x)$ qui est à éliminer, mais la variable x elle-même. La réalisation de cette élimination exige une transformation de la fonction $\cos\Pi(b-x)$. Cette transformation fournit aussi l'expression analytique de la fonction $\Pi(x)$.

Pour effectuer la transformation dont il s'agit, considérons un cercle limite et menons par le milieu H (*fig.* 5) d'une corde AC, ainsi que par les points E et E′ arbitrairement choisis sur cette corde et sur son prolongement, les axes Bb, Dd; D′d'.

Comme nous voyons

$$(\alpha) \qquad \text{arc AC} = \text{arc AD} - \text{arc DC},$$

Fig. 5.



AL et CK étant perpendiculaires à Dd, l'équation (I) nous donne

$$\text{arc AD} = l\cot\Pi(\text{AL}), \qquad \text{arc DC} = l\cot\Pi(\text{CK}).$$

Désignons la demi-corde KC par x et le segment HE par y. Il est évident que l'angle HEL est égal à $\Pi(y)$; donc, selon l'équation (III), les triangles rectangles ALE et CKE nous donnent

$$\cot\Pi(\text{AL}) = \cot\Pi(x+y)\sin\Pi(y),$$
$$\cot\Pi(\text{CK}) = \cot\Pi(x-y)\sin\Pi(y).$$

Comme, selon l'équation (II),

$$AC = 2l \cot \Pi(x),$$

l'équation (α), après la substitution des valeurs trouvées, devient

$$(\beta) \left\{ \begin{array}{c} 2 \cot \Pi(x) = [\cot \Pi(x+y) + \cot \Pi(x-y)] \sin \Pi(y), \\ [x \gtreqless y]. \end{array} \right.$$

D'autre part,

$$(\alpha') \qquad \text{arc } AC = \text{arc } AD' - \text{arc } CD'.$$

Désignons maintenant HC par y et HE' par x. L'angle CE'D' étant égal à $\Pi(x)$, nous transformons l'équation (α') par un procédé parfaitement analogue en

$$(\beta') \left\{ \begin{array}{c} 2 \cot \Pi(y) = [\cot \Pi(x+y) - \cot \Pi(x-y)] \sin \Pi(x), \\ [x \gtreqless y]. \end{array} \right.$$

Comme les quantités x et y dans les équations (β) et (β') ne sont soumises qu'à la seule condition $x \gtreqless y$, nous pourrons leur attribuer la même valeur dans les deux équations, ce qui nous donne par élimination les formules bien connues

$$\cot \Pi(x+y) = \frac{\cos \Pi(y) + \cos \Pi(x)}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(x)},$$

$$\cot \Pi(x-y) = \frac{\cos \Pi(x) - \cos \Pi(y)}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(x)},$$

d'où nous trouvons sans peine

$$(\gamma) \qquad \cos \Pi(x+y) = \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)},$$

$$(\delta) \qquad \cos \Pi(x-y) = \frac{\cos \Pi(x) - \cos \Pi(y)}{1 - \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)},$$

sans ambiguïté, parce que toutes les quantités qui y figurent sont positives.

En éliminant $\cos \Pi(x)$ des équations (VIII) au moyen de l'équation (δ), nous trouvons la troisième équation

trigonométrique du triangle obliquangle

$$\cos\Pi(b)\,[1+\cos\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos A\cos C]$$
$$=\cos\Pi(a)\cos C+\cos\Pi(c)\cos A.$$

En outre, l'équation (γ) nous donne

$$\frac{1+\cos\Pi(x+y)}{1-\cos\Pi(x-y)}=\frac{1+\cos\Pi(x)}{1-\cos\Pi(x)}\,\frac{1+\cos\Pi(y)}{1-\cos\Pi(y)},$$

ou bien

$$\text{(IX)}\qquad \cot\tfrac{1}{2}\Pi(x+y)=\cot\tfrac{1}{2}\Pi(x)\cot\tfrac{1}{2}\Pi(y).$$

Comme la seule fonction qui satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y),$$

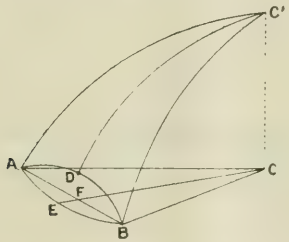
x et y étant parfaitement arbitraires, est $\varphi(x)=a^x$, nous trouvons

$$\cot\tfrac{1}{2}\Pi(x)=e^{\frac{x}{k}}.$$

C'est l'équation fondamentale de la Géométrie de Lobatcheffsky. Pour compléter la théorie, il ne reste qu'à déterminer la constante k.

Soient AEB (*fig.* 6) un arc de cercle, C son centre, C'

Fig. 6.



son centre géodésique sur la sphère limite à laquelle il appartient. Le triangle rectiligne ACB et le triangle géodésique AC'B sont équilatères. D et F étant les milieux de l'arc ADB et de la corde AB, nous désignons AF par λ, AD par σ. Soient r le rayon plan AC du cercle,

ρ le rayon géodésique AC′. Il est évident que

$$\sigma = \rho \sin\frac{\omega}{2} = l \cot\Pi(r) \sin\frac{\omega}{2},$$

$$\cot\Pi(\lambda) = \cot\Pi(r) \sin\frac{\omega}{2},$$

ω désignant la mesure commune des angles AC′B et ACB. Si cet angle devient infiniment petit, la corde 2λ le devient aussi et le rapport

$$\cot\Pi(\lambda) : \lambda = \frac{e^{\frac{\lambda}{k}} - e^{-\frac{\lambda}{k}}}{2\lambda}$$

tend vers $\frac{1}{k}$. Donc

$$\lim \frac{2\sigma}{2c} = \frac{e}{k} \qquad (\omega = 0).$$

Or, cette limite est égale à 1; donc $k = e$, et

$$\cot\tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{\frac{x}{e}},$$

$2l$ désignant la longueur d'un arc limite dont les axes extrêmes font des angles de 45° avec sa corde.

Remarquons encore que la formule (I) détermine bien simplement la longueur de la circonférence de cercle. En effet, ρ étant son rayon géodésique et r son rayon plan,

$$C = 2\pi\rho = 2\pi l \cot\Pi(r).$$

SUR LE THÉORÈME DE CARNOT;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

I. — SUR LE THÉORÈME CORRÉLATIF DE CELUI DE CARNOT.

Nous partirons de la proposition suivante :

(A) *Considérons sur chaque côté d'un polygone* ABC...HKL *un même nombre de points* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$;

$\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \lambda'; \ldots; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \ldots, \lambda_n$ *liés par la relation segmentaire*

$$\frac{A\alpha}{B\alpha}\frac{A\beta}{B\beta}\cdots\frac{A\lambda}{B\lambda}\frac{B\alpha'}{C\alpha'}\frac{B\beta'}{C\beta'}\cdots\frac{B\lambda'}{C\lambda'}\cdots\frac{L\alpha_n}{A\alpha_n}\frac{L\beta_n}{A\beta_n}\cdots\frac{L\lambda_n}{A\lambda_n}=+1,$$

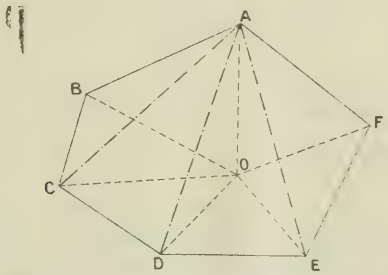
que nous appellerons relation de Carnot.

Prenons la figure polaire réciproque relativement à un cercle de ce polygone et des points situés sur ses côtés. Nous obtenons ainsi un nouveau polygone $A_1B_1C_1\ldots H_1K_1L_1$ et des droites issues en nombre égal de chaque sommet de ce nouveau polygone, et correspondant aux points $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$. Ces droites rencontrent chaque côté du polygone ne passant pas par le sommet d'où elles sont issues en un certain nombre de points.

Entre tous les points ainsi obtenus et les sommets du polygone il existe une relation de Carnot.

Remarquons d'abord que, si l'on joint un point O à

Fig. 1.



tous les sommets d'un polygone ABCDEF, on a la relation

$$(1)\qquad \frac{\sin OAB}{\sin OBA}\frac{\sin OBC}{\sin OCB}\cdots\frac{\sin OFA}{\sin OAF}=1.$$

On a en effet

$$\frac{\sin OAB}{\sin OBA}=\frac{OB}{OA},\qquad \frac{\sin OBC}{\sin OCB}=\frac{OC}{OB},\qquad \ldots.$$

En multipliant membre à membre, le second membre devient égal à l'unité.

En particulier, si l'on joint un sommet A du polygone à tous les autres sommets, on a

$$(2)\qquad \frac{\sin ABC}{\sin ACB}\,\frac{\sin ACD}{\sin ADC}\cdots\frac{\sin AEF}{\sin AFE}=1.$$

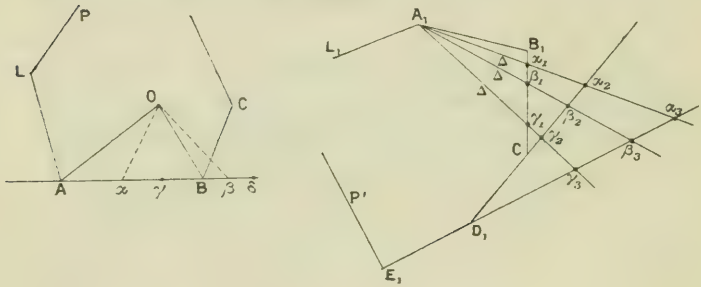
Joignons maintenant le point O à un certain nombre n de points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ situés sur le côté AB. On peut écrire

$$A\alpha = O\alpha\,\frac{\sin AO\alpha}{\sin OAB},\qquad B\alpha = O\alpha\,\frac{\sin BO\alpha}{\sin OBA}$$

donc

$$\frac{A\alpha}{B\alpha}=\frac{\sin OBA}{\sin OAB}\,\frac{\sin AO\alpha}{\sin BO\alpha}.$$

Fig. 2.



On aura, par suite,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{A\alpha}{B\alpha}\,\frac{A\beta}{B\beta}\cdots\frac{A\lambda}{B\lambda}\\ &=\left(\frac{\sin OBA}{\sin OAB}\right)^n\frac{\sin AO\alpha}{\sin BO\alpha}\,\frac{\sin AO\beta}{\sin BO\beta}\cdots\frac{\sin AO\lambda}{\sin BO\lambda}.\end{aligned}\right.$$

En joignant de même le point O à n points $\alpha', \beta', \ldots, \lambda'; \ldots; \alpha_n, \beta_n, \ldots, \lambda_n$ pris sur chaque côté du polygone, on aura

$$\begin{aligned}&\frac{A\alpha}{B\alpha}\,\frac{A\beta}{B\beta}\cdots\frac{A\lambda}{B\lambda}\,\frac{B\alpha'}{C\alpha'}\,\frac{B\beta'}{C\beta'}\cdots\frac{L\alpha_n}{A\alpha_n}\,\frac{L\beta_n}{A\beta_n}\cdots\frac{L\lambda_n}{A\lambda_n}\\ &=\left(\frac{\sin OAB}{\sin OBA}\,\frac{\sin OBC}{\sin OCB}\cdots\frac{\sin OLA}{\sin OAL}\right)^n\\ &\quad\times\frac{\sin AO\alpha}{\sin BO\alpha}\,\frac{\sin AO\beta}{\sin BO\beta}\cdots\frac{\sin BO\alpha'}{\sin CO\alpha'}\,\frac{\sin BO\beta'}{\sin CO\beta'}\cdots\frac{\sin LO\lambda_n}{\sin AO\lambda_n},\end{aligned}$$

La première partie du second membre est égale à l'unité d'après (2). Donc, si les points considérés sont liés par une relation de Carnot, le premier membre étant égal à l'unité, il en est de même, alors, de la seconde partie du second membre, et l'on a la relation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin AO\alpha}{\sin BO\alpha}\,\frac{\sin AO\beta}{\sin BO\beta}\cdots\frac{\sin AO\lambda}{\sin BO\lambda}\,\frac{\sin BO\alpha'}{\sin CO\alpha'}\cdots \\ &\qquad\times\frac{\sin BO\lambda'}{\sin CO\lambda'}\cdots\frac{\sin LO\alpha_n}{\sin AO\alpha_n}\cdots\frac{\sin LO\lambda_n}{\sin AO\lambda_n}=\pm 1. \end{aligned}\right.$$

Prenons maintenant la polaire réciproque du polygone P et des points situés sur ses côtés par rapport à un cercle de centre O. Au côté AB correspond le point A_1, et aux points α, β, ..., λ situés sur AB, des droites Δ issues de A_1. Appelons α_1, β_1, ..., λ_1 les points où ces droites rencontrent le côté B_1C_1 du polygone P'. On a [relation (3)]

$$\frac{B_1\alpha_1}{C_1\alpha_1}\,\frac{B_1\beta_1}{C_1\beta_1}\cdots\frac{B_1\lambda_1}{C_1\lambda_1}$$
$$=\left(\frac{\sin A_1B_1C_1}{\sin A_1C_1B_1}\right)^n\frac{\sin C_1A_1\alpha_1}{\sin B_1A_1\alpha_1}\,\frac{\sin C_1A_1\beta_1}{\sin B_1A_1\beta_1}\cdots\frac{\sin C_1A_1\lambda_1}{\sin B_1A_1\lambda_1}.$$

Appelant de même α_2, β_2, ..., λ_2; ...; α_n, β_n, ..., λ_n les points où les droites Δ rencontrent les côtés C_1D_1, ... K_1L_1 du polygone, on a

$$\frac{C_1\alpha_2}{D_1\alpha_2}\,\frac{C_1\beta_2}{D_1\beta_2}\cdots\frac{C_1\lambda_2}{D_1\lambda_2}$$
$$=\left(\frac{\sin A_1C_1D_1}{\sin A_1D_1C_1}\right)^n\frac{\sin D_1A_1\alpha_2}{\sin C_1A_1\alpha_2}\,\frac{\sin D_1A_1\beta_2}{\sin C_1A_1\beta_2}\cdots\frac{\sin D_1A_1\lambda_2}{\sin C_1A_1\lambda_2}.$$

.....

$$\frac{K_1\alpha_n}{L_1\alpha_n}\,\frac{K_1\beta_n}{L_1\beta_n}\cdots\frac{K_1\lambda_n}{L_1\lambda_n}=\left(\frac{\sin A_1K_1L_1}{\sin A_1L_1K_1}\right)^n\frac{\sin L_1A_1\alpha_n}{\sin L_1A_1\alpha_n}\cdots.$$

Multiplions membre à membre, la première partie du second membre est égale à l'unité [d'après la relation (2)]; dans la seconde partie, les angles tels que $C_1A_1\alpha_1$ et $C_1A_1\alpha_2$ étant les mêmes, il reste finalement

la relation

$$\frac{B_1\alpha_1}{C_1\alpha_1}\cdots\frac{B_1\lambda_1}{C_1\lambda_1}\,\frac{C_1\alpha_2}{D_1\alpha_2}\cdots\frac{C_1\lambda_2}{D_1\lambda_2}\,\frac{K_1\alpha_n}{L_1\alpha_n}\cdots\frac{K_1\lambda_n}{L_1\lambda_n}$$
$$=\frac{\sin L_1A_1\alpha_1}{\sin B_1A_1\alpha_1}\,\frac{\sin L_1A_1\beta_1}{\sin B_1A_1\beta_1}\cdots\frac{\sin L_1A_1\lambda_1}{\sin B_1A_1\lambda_1}.$$

Ainsi, en formant pour les points d'intersection avec les côtés du polygone P′ des droites Δ issues de A_1 le produit que représente le premier membre, ce produit est égal au produit des rapports des sinus des angles que chaque droite Δ fait avec les côtés du polygone issus du sommet A_1 d'où elles partent; de même, en formant pour les droites Δ′ issues de B_1 le produit analogue; ce produit sera égal au produit des rapports des sinus des angles que chaque droite Δ′ fait avec les côtés B_1A_1 et B_1C_1, etc.

En multipliant membre à membre toutes les égalités ainsi obtenues, dans le premier membre on obtiendra le produit des rapports des distances de *tous* les points d'intersection sur chaque côté aux deux sommets du polygone limitant ce côté; quant au second membre, il sera égal (en valeur absolue) à l'unité d'après la relation (4), car l'angle $L_1A_1\alpha_1$ par exemple est égal (ou supplémentaire) à l'angle $AO\alpha$, dans le premier polygone, les côtés de ces deux angles étant perpendiculaires.

Donc la proposition se trouve démontrée.

Conséquences du théorème précédent. — Trois points étant pris en ligne droite sur les côtés d'un triangle, il existe entre ces points une relation de Carnot (théorème de Ménélaüs).

Transformons par polaires réciproques et appliquons le théorème (A). On voit que trois droites concourantes, issues des trois sommets d'un triangle, rencontrent les côtés opposés en trois points entre lesquels existe une

relation de Carnot. C'est le théorème de Jean de Céva.

Plus généralement, les six points d'intersection d'une conique et des côtés d'un triangle sont liés par une relation de Carnot. Corrélativement, d'après le théorème (A), si l'on mène par les sommets d'un triangle les tangentes à une conique, elles rencontrent les côtés du triangle en six points liés par une relation de Carnot.

Plus généralement encore, on est conduit, dans le cas d'un polygone quelconque et d'une courbe algébrique quelconque, à un théorème énoncé et démontré algébriquement par M. L. Ravier (*Nouvelles Annales*, août 1892) et relatif aux points d'intersection avec les côtés d'un polygone des tangentes menées par chaque sommet à une courbe algébrique. Ces points sont liés par une relation de Carnot.

On sait que, dans le cas d'une conique et d'un triangle, la réciproque du théorème de Carnot est vraie. La réciproque de son corrélatif l'est également, de sorte que l'on peut énoncer la proposition suivante :

Six points étant pris sur les côtés d'un triangle, deux sur chaque côté, et liés par une relation de Carnot :

1° *Ces six points sont sur une même conique;*

2° *Les droites joignant chaque sommet du triangle aux deux points situés sur le côté opposé touchent une même conique.*

En d'autres termes, les points d'intersection avec chaque côté d'un triangle des tangentes menées par chaque sommet à une conique sont sur une même conique, et inversement les droites joignant chaque sommet aux points d'intersection d'une conique avec les côtés touchent une même conique.

Cas particuliers :

En joignant les points d'intersection de deux trans-

versales avec les côtés d'un triangle aux sommets, on obtient six droites tangentes à une même conique.

En joignant chaque sommet d'un triangle à deux points du plan, les droites ainsi obtenues rencontrent les côtés du triangle en six points situés sur une même conique.

Cette dernière proposition, bien connue, est due à Steiner.

II. — Applications (triangles homologiques).

(B) Théorème. — *Lorsque deux triangles sont homologiques :*

1° *Les points où chaque côté de l'un sont rencontrés par les deux côtés non correspondants de l'autre sont sur une même conique;*

2° *Les droites joignant chaque sommet de l'un aux deux sommets non correspondants de l'autre touchent une même conique;*

3° *Les droites joignant chaque sommet de l'un aux points où le côté opposé à ce sommet rencontre les deux côtés non correspondants de l'autre touchent une même conique;*

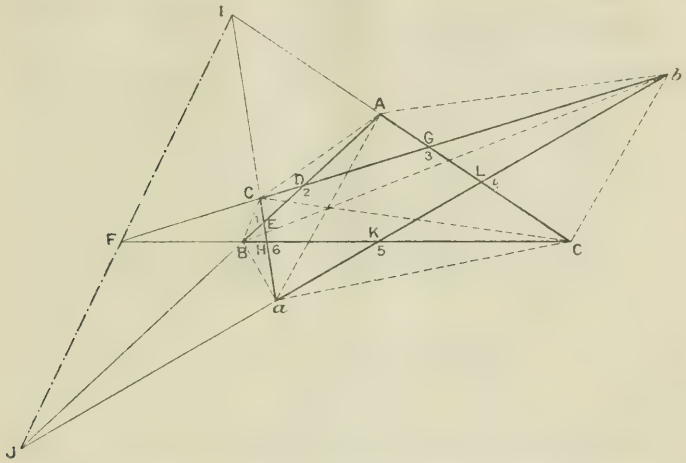
4° *Les points d'intersection de chaque côté de l'un avec les droites joignant le sommet opposé à ce côté aux deux sommets non correspondants de l'autre sont sur une même conique.*

Soient ABC, *abc* deux triangles homologiques. Les sommets correspondants (A, *a*), (B, *b*), (C, *c*) sont situés sur trois droites concourantes et les côtés correspondants (AB, *ab*), (AC, *ac*), (BC, *bc*) se rencontrent en trois points situés sur une même droite IFJ.

Ces six points H, K, L, G, D, E où chaque côté d'un triangle est rencontré par les côtés non correspondants

de l'autre sont sur une même conique. En effet, le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle ABC coupé par

Fig. 3.



les transversales bc, ac, ab, IFJ, donne successivement les relations

$$\overline{AD} \times \overline{BF} \times \overline{CG} = \overline{AG} \times \overline{CF} \times \overline{BD},$$
$$\overline{AE} \times \overline{BH} \times \overline{CI} = \overline{AI} \times \overline{CH} \times \overline{BE},$$
$$\overline{AJ} \times \overline{BK} \times \overline{CL} = \overline{AL} \times \overline{CK} \times \overline{BJ},$$
$$\overline{AI} \times \overline{BJ} \times \overline{CF} = \overline{AJ} \times \overline{BF} \times \overline{CI}.$$

Multiplions membre à membre ces quatre relations, il vient, après simplifications,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\overline{AD} \times \overline{AE} \times \overline{BH} \times \overline{BK} \times \overline{CL} \times \overline{CG} \\ &= \overline{AG} \times \overline{AL} \times \overline{CK} \times \overline{CH} \times \overline{BE} \times \overline{BD}. \end{aligned} \right.$$

1° Donc (réciproque du théorème de Carnot) les points H, K, L, G, D, E sont sur une même conique.

2° Transformons par dualité : à deux triangles homologiques correspondent deux triangles homologiques ; on obtient la proposition énoncée.

3° La troisième partie résulte de la relation (1) et de la réciproque du théorème corrélatif de celui de Carnot.

4° La quatrième partie s'obtient en appliquant à la troisième le principe de dualité.

Réciproques. — 1° *Une conique quelconque coupant les côtés d'un triangle en six points, si l'on numérote ces points en partant d'un sommet du triangle* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les droites* 2 3, 4 5, 6 1 *forment un triangle homologique du triangle donné.*

En effet, en appliquant le théorème de Carnot, on a la relation

$$\begin{aligned}&\overline{AD} \times \overline{AE} \times \overline{BH} \times \overline{BK} \times \overline{CL} \times \overline{CG}\\ &= \overline{AG} \times \overline{AL} \times \overline{CK} \times \overline{CH} \times \overline{BE} \times \overline{BD},\end{aligned}$$

et, en appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle ABC coupé par les transversales *bc*, *ac*, *ab*,

$$\overline{AD} \times \overline{BF} \times \overline{CG} = \overline{AG} \times \overline{CF} \times \overline{BD},$$

$$\overline{AE} \times \overline{BH} \times \overline{CI} = \overline{AI} \times \overline{CH} \times \overline{BE},$$

$$\overline{AJ} \times \overline{BK} \times \overline{CL} = \overline{AL} \times \overline{CK} \times \overline{BJ}.$$

Multipliant membre à membre les trois dernières relations et tenant compte de la première, il vient

$$\overline{AI} \times \overline{BJ} \times \overline{CF} = \overline{AJ} \times \overline{BF} \times \overline{CI}.$$

Donc (réciproque du théorème de Ménélaüs) les trois points I, F, J sont en ligne droite et les deux triangles ABC, *abc* sont homologiques.

2° *Si par les sommets d'un triangle on mène les tangentes à une conique quelconque, et si l'on numérote successivement ces tangentes à partir d'un sommet* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les points de rencontre des tangentes* (2, 3), (4, 5), (6, 1) *forment un triangle homologique du premier.*

Ce théorème est corrélatif du précédent.

On peut encore énoncer ainsi les deux réciproques précédentes :

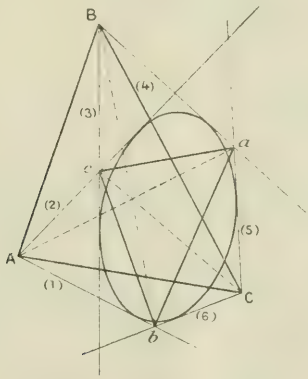
1. Lorsqu'un hexagone est inscrit dans une conique, si l'on numérote successivement les côtés 1, 2, 3, 4, 5, 6, les côtés (1, 3, 5) et (2, 4, 6) forment deux triangles homologiques [1].

Donc :

1° Les points de rencontre des côtés (1 et 4), (2 et 5), (3 et 6) sont en ligne droite (théorème de Pascal) ;

2° Les droites joignant les points (1, 3) [2] et (4, 6) ; (2, 4) et (5, 1) ; (3, 5) et (6, 2) sont concourantes.

Fig. 4.



Corollaires. — Les droites joignant le sommet (1, 3) aux points (2, 4) et (2, 6) et les droites analogues (droites joignant chaque sommet d'un triangle aux som-

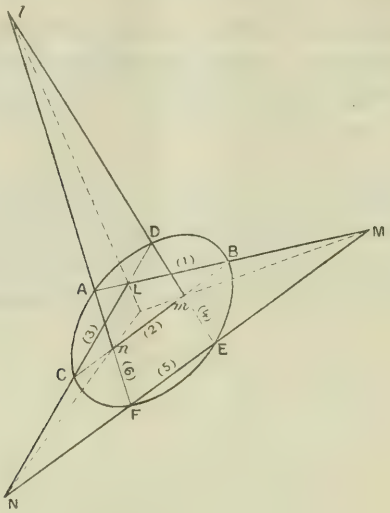
---

(1) Il nous paraît préférable d'énoncer ainsi le théorème de Pascal, car cet énoncé implique, outre la propriété si connue de l'hexagone inscrit, d'autres propriétés intéressantes.

(2) On a appelé point (1, 3) le point situé à l'intersection des côtés numérotés 1 et 3.

mets non correspondants de l'autre) touchent une même conique.

Fig. 5.



On obtiendra deux autres corollaires en appliquant les deux dernières parties du théorème fondamental (B).

II. Lorsqu'un hexagone est circonscrit à une conique, si l'on numérote successivement les sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6, en joignant les sommets (1, 3, 5) et (2, 4, 6), on forme deux triangles homologiques.

Donc :

1° Les droites joignant les sommets correspondants (1 et 4), (2 et 5), (3 et 6) sont concourantes (théorème de Brianchon).

2° Les points de rencontre des côtés correspondants (1, 3) et (4, 6); (2, 4) et (5, 1); (3, 5) et (6, 2) sont en ligne droite.

En appliquant le théorème (B), on obtiendra trois autres propriétés intéressantes de la figure.

THÉORÈMES SUR LES TRANSVERSALES;

PAR M. LE PROFESSEUR FRANCESCO FERRARI.

M. L. Ravier démontra (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XI, 3e série) un théorème analogue à un théorème de Carnot et qui est une généralisation du théorème de Ceva. Ce théorème, si un point d'un côté d'un polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ signifie un point de la droite à laquelle appartient le côté, et si le rapport dans lequel un point M divise un côté $A_s A_{s+1}$ du polygone signifie le rapport positif ou négatif $\frac{A_s M}{M A_{s+1}}$, peut être énoncé ainsi :

I. *Si, par tout sommet d'un polygone plan, on mène toutes les tangentes à une courbe algébrique de son plan, leurs points d'intersection avec les côtés du polygone non adjacents à ce sommet divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$.

Sur cet intéressant argument, je veux faire remarquer les autres théorèmes suivants :

II. *Si, par tout sommet d'un polygone plan de n côtés, on mène m droites dont les points d'intersection avec les côtés non adjacents à ce sommet divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$ *et* $mn-1$ *de ces droites sont tangentes à une même courbe de* $mn^{\text{ième}}$ *classe, la* $mn^{\text{ième}}$ *droite sera aussi tangente à la même courbe.*

En effet, si la $mn^{\text{ième}}$ droite (soit $A_1 T_1$) n'était pas tangente à la courbe, la $m^{\text{ième}}$ tangente à la courbe pas-

sant par A_1 serait une autre droite A_1T', et en appelant respectivement p_1, p' les produits des rapports dans lesquels les côtés du polygone non adjacents à A_1 sont divisés par leurs points d'intersection avec les droites A_1T_1, A_1T', devrait être, à cause de l'hypothèse et du théorème I, $p_1 = p'$. Mais si M, N sont respectivement les points où les A_1T_1, A_1T' coupent la diagonale A_nA_2, le polygone $A_2A_3 \ldots A_n$ coupé par A_1T_1, A_1T' donne

$$p_1 \frac{A_nM}{MA_2} = (-1)^{n-1}, \qquad p' \frac{A_nN}{NA_2} = (-1)^{n-1},$$

et de là il s'ensuivrait que

$$\frac{A_nM}{MA_2} = \frac{A_nN}{NA_2},$$

ce qui est absurde.

Par

$$\begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases},$$

on obtient les deux propriétés :

1. *Si trois points divisent les côtés d'un triangle dans des rapports dont le produit est* $+1$, *les droites qui les joignent aux sommets opposés passent par un même point (situé au fini ou à l'infini).*

2. *Si sur les côtés d'un triangle sont situés six points (deux sur chacun), qui divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$, *les droites qui les joignent aux sommets opposés sont tangentes à une même conique.*

III. *Si, par les sommets d'un polygone plan d'un nombre impair de côtés, on mène toutes les tangentes à une courbe algébrique de son plan, leurs points d'intersection avec les côtés respectivement opposés divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$.

Réciproquement : *Si, sur tout côté d'un polygone plan d'un nombre impair n de côtés, existent m points qui divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$, *et* $mn-1$ *des droites, qui les joignent aux sommets respectivement opposés, sont tangentes à une même courbe de* $m^{\text{ième}}$ *classe, la* $mn^{\text{ième}}$ *droite sera aussi tangente à la même courbe.*

IV. *Si, par tout sommet* (A_1) *d'un polygone plan* $A_1 A_2 \ldots A_n$, *on mène toutes les tangentes à une courbe algébrique de son plan à rencontrer deux côtés quelconques équidistants de ce sommet* $(A_s A_{s+1}, A_{n-s+1}, A_{n-s+2})$, *ensuite par le sommet successif* (A_2) *les tangentes à la même courbe à rencontrer les deux côtés successifs aux précédents* $(A_{s+1} A_{s+2}, A_{n-s+2}, A_{n-s+3})$, *et ainsi de suite par chacun des autres sommets, tous ces points d'intersection divisent les côtés du polygone dans des rapports dont le produit est* $+1$.

Ces deux théorèmes III, IV se démontrent à l'aide des formules mêmes établies par M. Ravier.

V. *Si, par tout côté d'un polygone gauche, on mène tous les plans tangents à une surface algébrique, leurs points d'intersection avec les côtés du polygone non adjacents à ce côté divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$.

Réciproquement : *Si, par tout côté d'un polygone gauche de n côtés, passent m plans, dont les points d'intersection avec les côtés non adjacents à ce côté divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$, *et* $mn-1$ *de ces plans sont tangents à la même surface de classe m, le* $mn^{\text{ième}}$ *plan sera aussi tangent à la même surface.*

Le théorème direct peut être démontré suivant un procédé analogue à celui de M. Ravier par le théorème I.

Soit, en effet,

$$f(u, v, w, \omega) = 0$$

l'équation en coordonnées de plans de la surface de classe m. La condition, pour qu'un plan passant par trois points (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2), (x', y', z', t') soit tangent à la surface, sera

$$(1) \qquad f\left\{\begin{array}{l} \left|\begin{array}{ccc} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ y' & z' & t' \end{array}\right|, \quad - \left|\begin{array}{ccc} x_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & z_2 & t_2 \\ x' & z' & t' \end{array}\right|, \\ \left|\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x' & y' & t' \end{array}\right|, \quad - \left|\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x' & y' & z' \end{array}\right| \end{array}\right\} = 0.$$

Si x', y', z', t' sont variables, la (1) représente le faisceau de plans tangents à la surface et passant par la droite $(x_1, \ldots)(x_2, \ldots)$. Si (x_r, y_r, z_r, t_r), (x_s, y_s, r_s, t_s) sont deux points quelconques, en mettant dans la (1)

$$x_r + \lambda x_s, \quad y_r + \lambda y_s, \quad z_r + \lambda z_s, \quad t_r + \lambda t_s$$

au lieu de x', y', z', t', on a une équation de $m^{\text{ième}}$ degré en λ, dont les solutions sont les m rapports dans lesquels le segment $(x_r, \ldots)(x_s, \ldots)$ vient d'être divisé par les plans du faisceau. Le produit de ces rapports, en désignant par $f_{1,2,r}$ et $f_{1,2,s}$ ce que devient le premier membre de la (1) si, au lieu de x', y', z', t', on met x_r, y_r, z_r, t_r ou x_s, y_s, z_s, t_s, sera de là égal à

$$(-1)^m \frac{f_{1,2,r}}{f_{1,2,s}}.$$

Si les sommets d'un polygone gauche $A_1 A_2 \ldots A_n$ sont (x_1, y_1, z_1, t_1), $(x_2, \ldots)$, $\ldots$, $(x_n, \ldots)$, le produit P de tous les rapports, dont on parle dans l'énoncé du

théorème, sera de là donné par la formule

$$
\begin{aligned}
P = \quad & (-1)^m \frac{f_{1,2,3}}{f_{1,2,4}} (-1)^m \frac{f_{1,2,4}}{f_{1,2,5}} \cdots (-1)^m \frac{f_{1,2,n-1}}{f_{1,2,n}} \\
& \times (-1)^m \frac{f_{2,3,4}}{f_{2,3,5}} (-1)^m \frac{f_{2,3,5}}{f_{2,3,6}} \cdots (-1)^m \frac{f_{2,3,n}}{f_{2,3,1}} \\
& \times (-1)^m \frac{f_{3,4,5}}{f_{3,4,6}} (-1)^m \frac{f_{3,4,6}}{f_{3,4,7}} \cdots (-1)^m \frac{f_{3,4,1}}{f_{3,4,2}} \\
& \times \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \times (-1)^m \frac{f_{n,1,2}}{f_{n,1,3}} (-1)^m \frac{f_{n,1,3}}{f_{n,1,4}} \cdots (-1)^m \frac{f_{n,1,n-2}}{f_{n,1,n-1}} \\
= & (-1)^{mn(n-3)} \frac{f_{1,2,3}}{f_{1,2,n}} \frac{f_{2,3,4}}{f_{2,3,1}} \frac{f_{3,4,5}}{f_{3,4,2}} \cdots \frac{f_{n,1,2}}{f_{n,1,n-1}};
\end{aligned}
$$

et puisque $n(n-3)$ est nombre pair, et

$$f_{1,2,3} = f_{2,3,1}, \ldots,$$

on a

$$P = +1.$$

La réciproque se démontre comme le théorème II.

De là, ayant égard aux théorèmes de Carnot, dérivent les corollaires :

1. Les plans, qui passent par les côtés d'un quadrilatère gauche et par un même point, rencontrent les côtés opposés en points situés dans un même plan; *réciproquement,* si quatre points sont les intersections d'un plan avec un quadrilatère gauche, les plans passant par chacun d'eux et par les côtés opposés passent par un même point.

2. Si par tout côté d'un pentagone gauche et par un même point passe un plan, les points d'intersection de ces plans avec les côtés du pentagone non adjacents à ce côté sont situés sur une même surface de second ordre.

3. Si, par tout côté d'un pentagone gauche passent deux plans qui coupent les côtés non adjacents en points qui divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est $+1$, les dix plans sont tangents à la même surface de deuxième classe.

4. Si, par les côtés d'un quadrilatère gauche, passent les plans tangents à une surface de deuxième classe, et si quatre de leurs points d'intersection avec les côtés non adjacents sont les points d'intersection d'un plan avec les côtés du quadrilatère, les autres quatre sont situés aussi dans un même plan; *ou*, si quatre de ces plans (deux quelconques ne passant pas par le même côté) passent par un même point, les autres passent aussi par un même point.

5. Si, par les côtés d'un pentagone gauche passent les plans tangents à une même surface de deuxième classe, et si dix de leurs points d'intersection avec les côtés non adjacents sont les points d'intersection d'une surface de second ordre avec les côtés du pentagone, les autres dix sont aussi situés sur une même surface de second ordre.

Si la surface du théorème V est de deuxième classe, et le polygone a les côtés tangents à la surface même, les deux plans tangents qui passent par tout côté coïncident, et le produit des rapports, etc., pourra être $+1$ ou -1. Pour $n = 4$, $n = 5$, on a donc :

6. Les plans tangents à une même surface de deuxième classe, qui passent par les côtés d'un quadrilatère gauche circonscrit à elle-même, coupent les côtés opposés en quatre points, qui sont dans le même plan ou tels que trois quelconques d'eux et le conjugué harmonique de l'autre, par rapport aux sommets du côté sur lequel il est situé, sont dans le même plan.

7. Les plans tangents à une même surface de deuxième classe, qui passent par les côtés d'un pentagone gauche circonscrit à elle-même, coupent les côtés non adjacents en dix points, qui sont situés sur une même surface de second ordre ou tels que neuf quelconques d'eux et le conjugué harmonique de l'autre, par rapport

aux sommets du côté sur lequel il est situé, sont sur une même surface de second ordre.

Le polygone du théorème V direct peut être aussi plan; s'il est plan, le théorème devient le suivant :

8. *Dans un polygone plan, les points d'intersection de tout côté avec les côtés non adjacents à lui divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$.

VI. *Si* $A_1 A_2 \ldots A_n$ *est un polygone plan, en faisant*

$$A_s A_{s+1} = a_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\ n+1 = 1),$$

et désignant par $t_s', t_s'', \ldots, t_s^m$ *les* m *tangentes conduites par* A_s *à une courbe de classe* m, *on a la relation*

$$(2) \quad \prod_{s=1}^{s=n} \frac{\sin(a_s \,.\, t_{s+1}')}{\sin(t_{s-1}' \,.\, a_{s+1})} \frac{\sin(a_s \,.\, t_{s+1}'')}{\sin(t_{s+1}'' \,.\, a_{s+1})} \cdots \frac{\sin(a_s \,.\, t_{s+1}^m)}{\sin(t_{s+1}^m \,.\, a_{s+1})} = +1.$$

En effet, si t_{s+1} est une droite passant par un sommet A_{s+1} du polygone et M le point où t_{s+1} coupe la diagonale $A_s A_{s+2}$, le produit des rapports, dans lesquels les points d'intersection de t_{s+1} avec les côtés non adjacents à A_{s+1} divisent ces côtés, est

$$\frac{A_{s+2} M}{M A_s}$$

et pour cela

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} \frac{\sin(a_{s+1} t_{s+1})}{\sin(t_{s+1} \,.\, a_s)};$$

et donc le produit de tous les rapports analogues correspondant aux mn tangentes $t_s', t_s'', \ldots, t_s^{(m)}$ est égal à l'inverse du premier membre de la (2).

VII. *Si* $A_1 A_2 \ldots A_n$ *est un polygone gauche, et si l'on désigne par* a_s *le côté*

$$A_s A_{s+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\ n+1 = 1;\ n+2 = 2),$$

par p_s le triangle $A_s A_{s+1} A_{s+2}$ ou son plan, et par t'_s, t''_s, ..., $t_s^{(m)}$ les m plans tangents conduits par a_s à une surface de classe m, on a les relations

$$(3)\quad \prod_{s=1}^{s=n} \frac{\sin(a_s \,.\, t'_{s+1})}{\sin(t'_{s+1} \,.\, a_{s+2})} \frac{\sin(a_s \,.\, t''_{s+1})}{\sin(t''_{s+1} \,.\, a_{s+2})} \cdots \frac{\sin(a_s \,.\, t_{s+1}^{(m)})}{\sin(t_{s+1}^{(m)} \,.\, a_{s+2})} = +1,$$

$$(4)\quad \prod_{s=1}^{s=n} \frac{\sin(p_s \,.\, t'_{s+1})}{\sin(t'_{s+1} \,.\, p_{s+1})} \frac{\sin(p_s \,.\, t''_{s+1})}{\sin(t''_{s+1} \,.\, p_{s+1})} \cdots \frac{\sin(p_s \,.\, t_{s+1}^{(m)})}{\sin(t_{s+1}^{(m)} \,.\, p_{s+1})} = +1.$$

En effet, si t_{s+1} est un plan passant par a_{s+1}, et M le point où t_{s+1} coupe la diagonale $A_s A_{s+3}$, le produit des rapports dans lesquels les points d'intersection de t_{s+1} avec les côtés non adjacents à a_{s+1} divisent ces côtés est égal à

$$\frac{A_{s+3}M}{MA_s}.$$

Mais on a

$$\frac{A_{s+3}M}{MA_s} = \frac{a_{s+2}}{a_s} \frac{\sin(a_{s+2} \,.\, t_{s+1})}{\sin(t_{s+1} \,.\, a_s)},$$

et aussi

$$\frac{A_{s+3}M}{MA_s} = \frac{\text{tétraèdre } A_{s+3}A_{s+2}A_{s+1}M}{\text{tétraèdre } MA_{s+1}A_{s+2}A_s} = \frac{p_{s+1}}{p_s} \frac{\sin(p_{s+1} \,.\, t_{s+1})}{\sin(t_{s+1} \,.\, p_s)},$$

et pour cela le produit de tous les rapports correspondant à tous les plans tangents, comme au théorème V, est égal soit à l'inverse du premier membre de la (3), soit à l'inverse du premier membre de la (4).

VIII. J'observerai encore que l'on peut formuler des théorèmes analogues aux théorèmes I, II, III, IV, VI et relativement au polygone sphérique, et relativement au polygone gauche, par les sommets duquel passent les plans tangents à une surface algébrique et parallèles à une même droite PQ. Ces théorèmes se démontrent en ayant recours, dans le premier cas, à la projection de la figure du centre de la sphère sur un plan, dans le second cas, à la projection sur un plan parallèlement à la droite PQ.

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PLANE [1];

PAR M. ROMUALD BLAZEIEVSKI.

Nous avons les équations de trois hyperboles

$$m_1 x_1 y_1 = u, \qquad m_2 x_2 y_2 = u, \qquad m_3 x_3 y_3 = u$$

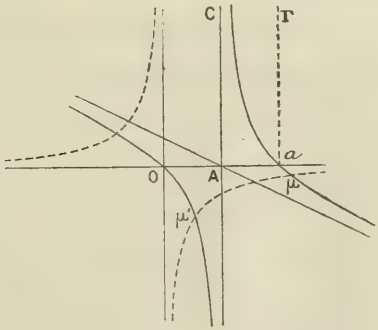
dont les coordonnées sont liées par la relation

$$y(2x - 1) = x(1 - x).$$

Le paramètre u dépend de l'inconnue D, diamètre du cercle inscrit dans le triangle, dont les bissectrices w_1, w_2, w_3 sont données. En effet, nous avons posé

$$u = \frac{x_1 x_2 x_3}{D}.$$

Pour fixer les idées, nous avons supposé que x_1, x_2, x_3



sont des quantités positives, mais y_i et u peuvent avoir un signe quelconque. Pour u négatif, nous aurons l'hyperbole tracée par points sur la figure; les intersections

(1) *Voir* 3e série, t. XIII, p. 28.

μ, μ' de cette courbe avec la courbe en trait continu

$$y(2x-1)=x(1-x)$$

peuvent être au delà des ordonnées AC, $a\Gamma$. Il est facile de justifier cette méthode : comme nous savons, il y a dans le triangle des cercles exinscrits; si nous prenons le rayon d'un tel cercle avec le signe négatif, on peut, en conservant pour x_i les signes positifs, continuer la représentation géométrique du problème avec le paramètre négatif u.

Nous avions établi les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} m_1 \mathrm{D} x_1(1-x_1) = 2x_1x_2x_3 - x_2x_3, \\ m_2 \mathrm{D} x_2(1-x_2) = 2x_1x_2x_3 - x_1x_3\,; \end{cases}$$

la soustraction donne

$$m_1 \mathrm{D} x_1(1-x_1) - m_2 \mathrm{D} x_2(1-x_2) = (x_1-x_2)x_3\,;$$

la relation d'Euler $x_3 = 2 - x_1 - x_2$ permet de faire la séparation de variables

$$m_1 \mathrm{D} x_1(1-x_1) + x_1^2 - 2x_1 = m_2 \mathrm{D} x_2(1-x_2) - x_2^2 - 2x_2,$$

et de même nous avons cette expression égale à

$$m_3 \mathrm{D}_3 x_3(1-x_3) + x_3^2 - 2x_3.$$

Ajoutant l'unité et chassant

$$m_i \mathrm{D}_i x_i(1-x_i)$$

à l'aide des équations (1), désignons la valeur commune de

$$m_i \mathrm{D}_i x_i(1-x_i) + (x_i-1)^2$$

par F,

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= 2x_1x_2x_3 + (x_1-1)^2 - x_2x_3 \\ &= \tfrac{1}{3}\left[6x_1x_2x_3 + \sum (x_1-1)^2 - \sum x_2x_3\right], \end{aligned}$$

quantité par rapport aux racines de l'équation en t qui

peut être écrite

$$t(t-1)^2 - (y-1)t - \frac{q}{z}(y-1);$$

le coefficient y est donné par la relation

$$(2q-z)(y-1) = \frac{qx^2 - q + z}{4x^2},$$

mais

$$1 - x^2 = \frac{z}{x};$$

ainsi

$$(2q-z)(y-1) = \frac{z(x-q}{4x^3}.$$

De l'équation en t nous avons

$$\sum (x_1 - 1)^2 - 3(y-1) - \frac{q}{z}(y-1)\sum \frac{1}{x_1} = 0,$$

mais $\sum \frac{q}{z}(y-1)\frac{1}{t} = y$,

$$\sum (x-1)^2 + 3(y-1) - y = 0.$$

Ainsi, en se reportant aux relations

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{q}{z}(y-1), \qquad \sum x_2 x_3 = y,$$

nous avons

$$F = \frac{2q}{z}(y-1) - (y-1) = \frac{x-q}{4x^3}.$$

Nous obtenons l'équation

$$m_1 D x_1 (1 - x_1) + (x_1 - 1)^2 = \frac{x-q}{4x^3}.$$

Comme $x = \frac{1}{D\sqrt{k}}$, $k = m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1$, $l = m_1 m_2 m_3$, $q = \frac{l}{k^{\frac{3}{2}}}$, l'équation pour x_1 sera

$$(2) \qquad m_1 D x_1 (1 - x_1) + (x_1 - 1)^2 - \tfrac{1}{4} D^2 (k - lD) = 0.$$

Pour x_2, x_3 nous aurons

$$m_2 D x_2 (1 - x_2) + (x_2 - 1)^2 - \tfrac{1}{4} D^2 (k - l D).$$

Ordonnant (2) par rapport à x_1, nous avons

$$(1 - m_1 D) x_1^2 + (m_1 D - 2) x_1 + 1 - \tfrac{1}{4} D^2 (k - l D).$$

Introduisons à la place de x_1, x_2, x_3,

$$x_1 - 1 = D y_1, \qquad x_2 - 1 = D y_2, \qquad x_3 - 1 = D y_3,$$

nous aurons

$$- m_1 D^2 y_1 (1 + D y_1) + D^2 y_2^2 = \tfrac{1}{4} D^2 (k - l D);$$

en divisant par D^2, nous aurons

$$(1 - m_1 D) y_1^2 - m_1 y_1 = \tfrac{1}{4} (k - l D),$$

$$[(1 - m_1 D) y_1 - \tfrac{1}{2} m_1]^2 = \tfrac{1}{4} [m_1^2 + (k - l D)(1 - m_1 D)];$$

il est facile de constater que

$$\begin{aligned} & m_1^2 + k - (k m_1 + l) D + l m_1 D^2 \\ & \quad = (m_1 + m_2 - m_1 m_2 D)(m_1 + m_3 - m_1 m_3 D). \end{aligned}$$

Introduisant pour un moment

$$a = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}, \qquad b = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}, \qquad c = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

nous aurons

$$(1 - m_1 D) y_1 - \tfrac{1}{2} m_1 = \tfrac{1}{2} m_1 \sqrt{m_2 m_3} \sqrt{(D - b)(D - c)},$$

$$(1 - m_2 D) y_2 - \tfrac{1}{2} m_2 = \tfrac{1}{2} m_2 \sqrt{m_1 m_3} \sqrt{(D - c)(D - a)},$$

$$(1 - m_3 D) y_3 - \tfrac{1}{2} m_3 = \tfrac{1}{2} m_3 \sqrt{m_1 m_2} \sqrt{(D - a)(D - b)};$$

les inconnues y_i sont exprimées par les radicaux dans lesquels entrent trois facteurs $D - a$, $D - b$, $D - c$. Les quantités a, b, c ne peuvent être égales, sinon que deux quantités m_1, m_2, m_3 sont égales; et ces dernières sont différentes toujours si les données du problème w_1, w_2, w_3 ne sont pas égales; par exemple si $m_1 = m_2$, on a

$$\frac{w_2 w_3}{w_1} = \frac{w_1 w_3}{w_2}, \qquad w_1^2 = w_2^2.$$

Ainsi, le problème amène à la considération du polynome du troisième degré $\sqrt{(D-a)(D-b)(D-c)}$.

Posons

$$dv = \frac{dD}{\sqrt{(D-a)(D-b)(D-c)}},$$

nous aurons

$$\sqrt{(D-b)(D-c)} = \frac{dD}{dv\sqrt{D-a}} = 2\,\frac{d\sqrt{D-a}}{dv}.$$

Ainsi, nous aurons

$$(3)\quad \begin{cases} (1-m_1 D)y_1 - \frac{1}{2}m_1 = m_1\sqrt{m_2 m_3}\,\dfrac{d\sqrt{D-a}}{dv}, \\ (1-m_2 D)y_2 - \frac{1}{2}m_2 = m_2\sqrt{m_1 m_3}\,\dfrac{d\sqrt{D-b}}{dv}, \\ (1-m_3 D)y_3 - \frac{1}{2}m_3 = m_3\sqrt{m_1 m_2}\,\dfrac{d\sqrt{D-c}}{dv}. \end{cases}$$

Si l'on fait $D - a = A\lambda^2$, A étant une constante que nous déterminerons après, on a

$$D - b = a - b + A\lambda^2, \qquad D - c = a - c + A\lambda^2.$$

Supposons $a > b > c$, nous aurons l'avantage de prendre $A = b - a$, et désignant $\frac{a-b}{a-c}$ par k^2, nous aurons

$$\sqrt{D-a} = \sqrt{b-a}\,\lambda,$$
$$\sqrt{D-b} = (a-b)\sqrt{1-\lambda^2},$$
$$\sqrt{D-c} = \sqrt{a-c}\,\sqrt{1-k^2\lambda^2}.$$

Les équations (3) donnent y_i et D comme fonctions elliptiques de la variable v. Faisons cette remarque, que les équations

$$(1-m_1 D)y_1^2 - m_1 y_1 - \tfrac{1}{4}(k - lD) = 0, \qquad \ldots$$

sont unicursales; et s'il fallait considérer une seule de ces équations, il n'y aurait aucune nécessité d'introduire des transcendantes. La résolution de la première amène

un radical portant sur un trinome du second degré. Mais si l'on considère l'ensemble de trois équations, on est contraint de recourir aux transcendantes elliptiques.

On voit une réciprocité entre y_1 et $\sqrt{D-a}$. La première est fonction de $D-a$ et de sa dérivée; on peut constater qu'il en est de même de $\sqrt{D-a}$. Différentions l'équation

$$(1-m_1 D)y_1^2 - m_1 y_1 - \tfrac{1}{4}(k - lD) = 0$$

par rapport à u, comme

$$\begin{aligned} &2(1-m_1 D)y_1 - m_1 \\ &\quad = m_1\sqrt{m_2 m_3}\sqrt{(D-b)(D-c)} = 2m_1\sqrt{m_2 m_3}\,\frac{d\sqrt{D-a}}{du}, \end{aligned}$$

on a

$$2m_1\sqrt{m_2 m_3}\,\frac{d\sqrt{D-a}}{du}\,\frac{dy_1}{du} + \left(\tfrac{1}{4}l - m_1 y_1^2\right)\frac{dD}{du} = 0$$

ou bien, en éliminant y_1^2,

$$m_1\sqrt{m_2 m_3}\,\frac{dy_1}{du} + \left\{\tfrac{1}{4}l - \frac{m_1[m_1 y_1 + \tfrac{1}{4}(k - lD)]}{1 - m_1 D}\right\}\sqrt{D-a} = 0,$$

réduisant le coefficient de $\sqrt{D-a}$ et divisant par le terme constant m_1,

$$\sqrt{m_2 m_3}\,\frac{dy_1}{du} - \frac{1}{4}\,\frac{m_1}{1-m_1 D}(m_2 + m_3 + y_1)\sqrt{D-a} = 0.$$

En général, y_i dépendent d'une équation différentielle du second ordre, mais cette équation, compliquée, ne nous apprend pas grand'chose sur le mode d'existence des y_i. On a l'habitude, en discutant les cubiques planes (Halphen, t. II, p. 413), de prendre l'origine de coordonnées sur la courbe; rien de plus facile que de changer la variable D en x lié à D par la relation

$$k - lD = x,$$

nous aurons

$$\left(1-\frac{m_1 k}{l}+\frac{m_1 x}{l}\right)y_1^2-m_1 y_1=\frac{1}{l}x,$$

$$2y_1\left(1-\frac{m_1 k}{l}+\frac{m_1 x}{l}\right)-m_1$$
$$=\sqrt{m_1^2+x\left(1-\frac{m_1 k}{l}+\frac{m_1 x}{l}\right)},$$

mais les formules sont plus compliquées.

Pour compléter la discussion des formules, remarquons que les points donnés par les équations

$$(1-m_1 \mathrm{D})y^2-m_1 \mathrm{D}y-\mathrm{F}=0,$$
$$(1-m_2 \mathrm{D})y^2-m_2 \mathrm{D}y-\mathrm{F}=0,$$
$$(1-m_3 \mathrm{D})y^2-m_3 \mathrm{D}y-\mathrm{F}=0,$$

si l'on représente les racines par les abscisses

$$y'_1,\ y''_1,\ \ y'_2,\ y''_2,\ \ y'_3,\ y''_3$$

d'une ligne droite, sont en involution. En effet, nous avons

$$m_1(m_2-m_3)+m_2(m_3-m_1)+m_3(m_1-m_2)=0.$$

Désignant les premiers membres des équations par A, B, C,

$$(m_2-m_3)\mathrm{A}+(m_3-m_1)+m_3(m_1-m_2)\mathrm{C}=0.$$

Supposant $\mathrm{C}=0$, nous aurons

$$(m_2-m_3)(1-m_1\mathrm{D})(y_3-y'_1)(y_3-y''_1)$$
$$+(m_3-m_1)(1-m_2\mathrm{D})(y_3-y'_2)(y_3-y''_2)=0,$$

mais la présence de l'inconnue D empêche d'appliquer cette théorie : s'il n'y entrait pas la variable D, alors cette équation permettrait de la prendre arbitraire sans que l'involution cessât d'exister. Et alors, de la nature des valeurs quelconques y_i, on pourrait conclure sur le mode d'existence de celles qui résolvent le problème, par exemple si l'équation donnant D, qui est d'un degré élevé, est irréductible ou non.

UNE NOUVELLE DÉFINITION DU PLAN;

PAR M. E. BALLUE,
Professeur au lycée de Lorient.

On définit ordinairement le plan : une surface telle que la droite qui passe par deux quelconques de ses points est tout entière située sur cette surface.

Cette définition présente le grand inconvénient d'assujettir le plan à une infinité de conditions.

Ne pourrait-on définir le plan par une propriété caractéristique plus simple que la précédente, et déduire celle-ci de la nouvelle définition?

Tel est l'objet de cette étude.

Nous commencerons par rappeler la définition de la ligne droite et une de ses propriétés fondamentales.

Ligne droite. — On appelle *ligne droite* une ligne possédant la propriété suivante : *Par deux points on peut faire passer une ligne droite et l'on n'en peut faire passer qu'une.*

On déduit de cette définition la propriété suivante : Si l'on fixe deux points A et B d'un corps, et qu'on imprime un mouvement à ce corps, tous les points du corps situés sur la droite AB restent immobiles.

Plan. — Par analogie avec la ligne droite, nous appellerons *plan* une surface possédant la propriété suivante : *Par trois points on peut faire passer un plan, et l'on n'en peut faire passer qu'un si les trois points ne sont pas en ligne droite.*

Théorème. — *Deux plans quelconques* P *et* P′ *sont superposables dans toute leur étendue.*

Prenons trois points A, B, C, non en ligne droite, dans le plan P′. Transportons le plan P′ de manière que A et B viennent s'appliquer sur le plan P, et faisons tourner P′ autour des deux points A et B supposés fixes jusqu'à ce que le point C vienne s'appliquer sur le plan P. Les deux plans P et P′, passant par les trois mêmes points A, B, C, non en ligne droite, coïncident par définition.

Corollaire I. — *Un plan est une surface qui s'étend à l'infini dans tous les sens.*

En effet, un plan est déterminé par trois points A, B, C non en ligne droite, et ces trois points peuvent s'éloigner dans tous les sens aussi loin qu'on le désire.

Corollaire II. — *Un plan coïncide encore avec lui-même lorsqu'il a subi un déplacement.*

Corollaire III. — *Un plan coïncide encore avec lui-même après qu'on l'a retourné* (1).

Corollaire IV. — *Une figure plane peut être transportée dans son plan sans altération.*

Théorème. — *Par trois points en ligne droite* A, B, C *on peut faire passer une infinité de plans.*

---

(1) Il conviendrait peut-être de définir exactement le sens du mot *retourné*. On y parvient de la façon suivante : Un plan étant une surface qui s'étend à l'infini dans tous les sens partage l'espace en deux régions distinctes. On peut considérer un plan comme ayant deux faces, la première adjacente à la première région, la deuxième adjacente à la seconde. Retourner un plan, c'est le déplacer dans l'espace de manière que sa seconde face devienne adjacente à la première région et, par suite, la première face adjacente à la seconde région.

Par définition, on peut faire passer un plan P par les trois points en ligne droite A, B, C. Faisons tourner ce plan autour des deux points A et B supposés fixes. D'après la propriété de la ligne droite, le point C reste immobile. Le plan P passe donc constamment par le point C. Autrement dit, il passe une infinité de plans par les trois points A, B, C.

Théorème. — *Un plan contient la ligne droite qui passe par deux de ses points.*

Soient A et B deux points d'un plan P, C un point quelconque situé sur la droite AB. Il suffit de démontrer que le plan P passe par C.

Par les trois points A, B, C en ligne droite, faisons passer un plan quelconque P′ et faisons-le tourner autour des deux points A et B supposés fixes jusqu'à ce qu'un autre de ses points, D, non situé sur la droite AB, vienne rencontrer P. Les deux plans P et P′ passant par les trois mêmes points A, B, D, non en ligne droite, coïncident. Le point C n'a pas bougé pendant le mouvement de P′. Donc le plan P contient le point C.

C. Q. F. D.

NOTE SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES SURFACES RÉGLÉES;

Par M. D. SINTSOF,
Agrégé de l'Université, à Kasan.

C'est une forme nouvelle de ladite équation que je veux établir dans ce qui suit. Sous forme fixée une sur-

face réglée peut être déterminée par deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} z = ax + \alpha, \\ y = bx + \beta, \end{cases}$$

dont les coefficients sont des fonctions quelconques d'un paramètre variable θ. La seconde de ces équations en donne la valeur en fonction de x et de y, que l'on porte dans la première et reçoit ainsi l'équation explicite de la surface. On peut donc différentier les équations (1) en y comptant θ fonction de x et de y, ce qui donne

$$p = a + \theta'_x(xa'_\theta + \alpha'_\theta), \qquad q = (xa'_\theta + \alpha'_\theta)\theta'_y,$$
$$0 = b + \theta'_x(xb'_\theta + \beta'_\theta), \qquad 1 = (xb'_\theta + \beta'_\theta)\theta'_y;$$

d'où, en éliminant $xa'_\theta + \alpha'_\theta$ et $xb'_\theta + \beta'_\theta$,

$$(2')\qquad p = a + \frac{\theta'_x}{\theta'_y} q,$$

$$(2'')\qquad 0 = b + \frac{\theta'_x}{\theta'_y};$$

et enfin

$$(3)\qquad p = a - bq.$$

Différentions (3) encore une fois par rapport à x et y, et posons comme à l'ordinaire $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \ldots,$

$$bs + r = (a'_\theta - qb'_\theta)\theta'_x,$$
$$bt + s = (a'_\theta - qb'_\theta)\theta'_y,$$
$$\frac{bs + r}{bt + s} = \frac{\theta'_x}{\theta'_y} = -b,$$

d'après (2''), c'est-à-dire

$$(4)\qquad tb^2 + 2sb + r = 0.$$

Différentions de nouveau (4), et posons pour abréger

l'écriture $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = k$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = l$, ..., nous aurons

$$2(bt+s)b'_\theta \theta'_x = -(b^2 m + 2bl + k),$$
$$2(bt+s)b'_\theta \theta'_y = -(b^2 n + 2bm + l),$$
$$\frac{b^2 m + 2bl + k}{b^2 n + 2bm + l} = \frac{\theta'_x}{\theta'_y} = -b,$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad nb^3 + 3mb^2 + 3lb + k = 0.$$

C'est à l'aide de ces équations (4) et (5) que l'on définit ordinairement, depuis Monge, l'équation différentielle des surfaces réglées.

Remarquons d'abord que, symboliquement, on peut écrire (4) et (5) ainsi :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \ldots.$$

Formons les combinaisons

$$(6) \qquad \frac{1}{b}[r(5) - k(4)] = 0 = (3rl - 2sk) + (3rm - tk)b + rnb^2,$$

$$(7) \qquad t(5) - nb(4) = 0 = tk + (3tl - rn)b + (3tm - 2sn)fr.$$

En éliminant des équations (4), (6) et (7), linéaires en b et b^2, ces quantités, nous avons l'équation sous forme d'un déterminant :

$$(8) \qquad 0 = \begin{vmatrix} r & 2s & t \\ 3rl - 2sk & 3rm - tk & rn \\ tk & 3tl - rn & 3tm - 2sn \end{vmatrix},$$

ou

$$(8') \quad \left\{ \begin{aligned} & t^3 k^2 + qrt^2 l^2 + qr^2 tm^2 + r^3 n^2 \\ & \quad - 6s(t^2 kl + 3rtlm + r^2 mn) + 6s^2(tkm + rln) \\ & \qquad - 2s^3 kn - 6(rt - s^2)(rln - 3nk + tkm) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour lui donner une forme plus symétrique, remarquons que les surfaces développables sont un cas particulier des surfaces réglées; l'équation différentielle de ces dernières doit donc être satisfaite en vertu de l'équation $rt - 2s^2 = 0$ et de ses dérivées par rapport à x et y :

$$(9') \qquad kt - 2sl + rm = 0,$$

$$(9'') \qquad tl - 2sm + rn = 0.$$

Le premier membre de l'équation (8') doit donc s'annuler avec $\Delta = rt - s^2$, $\frac{\partial \Delta}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Delta}{\partial y}$, ce qui nous donne l'idée de le présenter à l'aide de ces trois quantités. En remarquant que nous avons un terme $t^3 x^2$ qui peut provenir de $t\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^2$ et un autre $r^3 n^2 = r(rn)^2$, qui vient de $r\left(\frac{\partial \Delta}{\partial y}\right)^2$, nous recevons par un calcul facile la forme suivante de l'équation considérée :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} & t\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^2 - 2s\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial y}\right) + r\left(\frac{\partial \Delta}{\partial y}\right)^2 \\ & = \Delta \begin{vmatrix} r & s & t \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix}$$

s'annule aussi en vertu de $\Delta = 0$, $\frac{\partial \Delta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0$. C'est l'équation (10) que nous avons voulu donner dans cette Note.

SUR LES DÉTERMINANTS DONT LES ÉLÉMENTS PRINCIPAUX VARIENT EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;

PAR M. ALFREDO CAPELLI, à Naples.

Les déterminants dont les éléments principaux varient en progression arithmétique sont de la forme

$$F(z, y) = \begin{vmatrix} a_{11}+z & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+z+y & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+z+2y & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}+z+(n-1)y \end{vmatrix}$$

Ils dépendent de deux variables z et y; mais ils peuvent toujours se développer, d'une façon très simple, à l'aide de déterminants qui jouissent de la même propriété et ne dépendent que de la variable y. On a, en effet, l'identité suivante

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} F(z, y) &= z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-1)y] \\ &+ z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-2)y] \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} \\ &+ z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-3)y] \sum_{i<j\leqq n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}+y \end{vmatrix} \\ &+ z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-4)y] \\ &\times \sum_{i<j<h\leqq n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ih} \\ a_{ji} & a_{jj}+y & a_{jh} \\ a_{hi} & a_{hj} & a_{hh}+2y \end{vmatrix} + \dots \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+y & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+(n-1)y \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Dans le second membre de cette identité, chaque somme doit s'étendre à tous les systèmes de valeurs des indices $i, j, h, \ldots$ qui satisfont à l'inégalité qu'on voit au-dessous du signe $\sum$.

Ainsi, par exemple, on aura, pour $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+z+y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+z+2y \end{vmatrix}$$
$$= z(z+y)(z-2y) - z(z-y)(a_{11}+a_{22}+a_{33})$$
$$+ z\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}+y \end{vmatrix}\right\}$$
$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+2y \end{vmatrix}.$$

L'identité (1) se déduit facilement d'une identité que j'ai établie par des considérations empruntées à la théorie des opérations invariantes (voir *Rendiconti dell' Accademia delle Scienze di Napoli;* marzo 1889). Ce ne serait donc pas sans intérêt si l'on pouvait donner une démonstration directe de cette formule.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1894;

PAR M. J. LEMAIRE.

On considère les coniques représentées par l'équation

$$x^2 - 2\lambda xy - 2\lambda bx - \tfrac{1}{2}(a-b)y = 0,$$

où a, b sont deux constantes et λ un paramètre variable :

1° *Prouver que, si* λ *varie, les polaires d'un point fixe* M *par rapport à ces coniques passent par un point fixe* P, *dont on calculera les coordonnées, au moyen des coordonnées du point* M;

2° *On fait décrire au point* M *une droite arbitraire* Δ,

$$ux + vy + w = 0;$$

prouver que le point P *décrit alors une conique* S *et que, lorsque* Δ *se déplace dans le plan, la conique* S *se déforme en passant par trois points fixes* A, A′, A″. *Inversement, quand le point* P *décrit la conique* S, *le point* M *décrit la droite* Δ; *que devient-il quand le point* P *vient en l'un des trois points* A, A′, A″?

3° *Où doit être pris le point* M *pour que le point* P *soit rejeté à l'infini? Quelle position doit avoir la droite* Δ *pour que la conique* S *qui lui correspond soit une ellipse, une hyperbole, ou une parabole?*

4° *On considère toutes les coniques* S *qui sont des paraboles et, en particulier, les axes de ces courbes. Prouver que par tout point du plan il passe trois de ces axes; distinguer les points du plan pour lesquels ces trois axes sont réels et ceux pour lesquels un seul axe est réel;*

5° *Trouver le lieu des points pour lesquels deux de ces axes se coupent à angle droit.*

I. Les coniques C représentées par l'équation

$$x^2 + 2\lambda xy - 2\lambda bx - 4(a-b)y = 0 \tag{1}$$

passent par les quatre points fixes communs à la parabole

$$x^2 - 4(a-b)y = 0 \tag{2}$$

et aux deux droites

$$x(y-b) = 0. \tag{3}$$

On sait (théorème de Lamé) que les polaires d'un point fixe $M(x_0, y_0)$ par rapport à ces coniques ont un point commun P : la polaire de M est

$$x_0 x - 2(a-b)(y_0+y) + \lambda[x_0 y + x y_0 - b(x+x_0)] = 0.$$

Si donc x_1, y_1 sont les coordonnées de P, elles sont liées à celles de M par les relations

$$(4) \qquad \begin{cases} x_0 x_1 - 2(a-b)(y_0+y_1) = 0, \\ x_0 y_1 + x_1 y_0 - b(x_0+x_1) = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2(a-b)x_0(y_0+b)}{x_0^2 + 2(a-b)(y_0-b)}, \\ y_1 = \dfrac{b x_0^2 - 2(a-b)y_0(y_0-b)}{x_0^2 + 2(a-b)(y_0-b)}. \end{cases}$$

Les équations (4) sont symétriques par rapport aux coordonnées des points M et P ; donc on aurait les valeurs de x_0 et y_0 en fonction de x_1, y_1 par une simple permutation d'indices : la transformation, qui change M en P et réciproquement, est une transformation uniforme du second ordre.

II. Si M décrit la droite

$$(\Delta) \qquad ux + vy + w = 0,$$

P décrira une courbe dont nous aurons l'équation en éliminant x_0, y_0 entre les équations (4) et la suivante

$$u x_0 + v y_0 + w = 0.$$

Nous obtenons ainsi la conique

$$(S) \qquad \begin{vmatrix} x & -2(a-b) & -2(a-b)y \\ y-b & x & -bx \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$2(a-b)ux(y+b)+v[bx^2-2(a-b)y(y-b)] \\ +w[x^2+2(a-b)(y-b)]=0.$$

Elle est de la forme

$$uC_1+vC_2+wC_3=0.$$

Quand Δ varie, les coniques (S) forment un réseau; on voit sans peine que les trois coniques $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=0$ ont trois points communs

$$A(0, b),$$
$$A'[+2\sqrt{b(a-b)}, -b],$$
$$A''[-2\sqrt{b(a-b)}, -b].$$

Donc, quand Δ se déplace, S se déforme en passant par ces trois points fixes.

Remarquons que, si nous désignons par C'_1, C'_2, C'_3 ce que deviennent C_1, C_2, C_3 quand on y remplace x et y par les coordonnées de M, celles de P peuvent s'écrire

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{C'_1}{C'_3}, \\ y_1=\dfrac{C'_2}{C'_3}, \end{cases}$$

et c'est parce que les trois coniques ont trois points communs que la transformation définie par les équations (4) est uniforme.

Si P vient en A, on a

$$x_1=0, \qquad y_1=b;$$

les expressions de x_0, y_0 en fonction de x_1 et y_1 se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Remarquons que les équations (4) se réduisent alors à

$$y_0+b=0.$$

Le point M correspondant à A est donc sur la droite $A'A''$, et par conséquent au point de rencontre de cette droite avec Δ.

De même si P vient en A' ou en A'', le point M correspondant se trouve au point de rencontre de Δ avec $A''A$ ou avec AA'.

Ce résultat s'explique si l'on observe que $AA'A''$ est le triangle conjugué commun aux coniques (C).

III. Le point P sera rejeté à l'infini si les valeurs de x_1, y_1 sont infinies, c'est-à-dire si le point M est sur la parabole

$$C_3 = x^2 + 2(a-b)(y-b) = 0.$$

Toutefois si M est en A, point de cette parabole, les coordonnées de P ne sont plus infinies, mais indéterminées, les équations (4) se réduisent à

$$y_1 + b = 0.$$

P est indéterminé sur $A'A''$; cette droite est en effet la polaire de A, quelle que soit la conique S.

De même si M vient en A' ou A'', points situés aussi sur la parabole $C_3 = 0$, le point P est indéterminé sur $A''A$ ou sur AA'.

La conique S est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole selon que l'on a

$$(a-b)^2 u^2 + 2(a-b)(bv + w)v \lesseqgtr 0,$$

ou, si nous supposons $a > b$, selon que

$$(a-b)u^2 + 2(bv + w)v \lesseqgtr 0,$$

c'est-à-dire selon que la droite Δ a 0, 1 ou 2 points communs avec la conique

$$(5) \qquad (a-b)u^2 + 2(bv + w)v = 0.$$

qui est précisément la parabole $C_3 = 0$ déjà obtenue; conclusions inverses si $a < b$.

IV. Supposons que S soit une parabole; son axe est

$$(6) \qquad (u^2 + 4v^2)(ux - 2vy) - 2au^2v = 0.$$

Cette équation, qui exprime que l'axe passe au point (x, y), détermine, avec la condition (5), les coordonnées tangentielles des droites Δ correspondant aux paraboles dont les axes passent au point (x, y).

Le coefficient angulaire de la droite (6) a pour valeur $\frac{u}{2v}$. Posons $\frac{u}{2v} = \mu$, l'équation (6) devient

$$(7) \qquad x\mu^3 - (y + a)\mu^2 + x\mu - y = 0.$$

C'est l'équation aux coefficients angulaires des axes des paraboles qui passent au point (x, y).

Par le point (x, y) passeront un ou trois axes réels, selon que l'équation (7) aura une ou trois racines réelles distinctes. Le lieu des points (x, y), pour lesquels elle aura une racine double, séparera donc les points du plan pour lesquels un seul ou trois axes seront réels. Ce dernier lieu s'obtient en écrivant que les dérivées de (7) par rapport à μ,

$$(3\mu^2 + 1)x - 2\mu y - 2a\mu = 0,$$

et par rapport au paramètre 1 d'homogénisation,

$$2\mu x - (\mu^2 + 3)y - a\mu^2 = 0,$$

ont une solution commune en μ, ce qui donne, en résolvant ces deux équations par rapport à x et à y, la courbe sous forme unicursale

$$x = \frac{2a\mu}{(1 + \mu^2)^2}, \qquad y = \frac{a\mu^2(1 - \mu^2)}{(1 + \mu^2)^2},$$

ou, en posant $\mu = \cot\frac{u}{2}$,

$$x = \frac{2a}{3}\sin u(1 - \cos u), \qquad y = -\frac{a}{2}\cos u(1 + \cos u).$$

On reconnaît immédiatement les coordonnées d'un point de l'hypocycloïde engendrée par un cercle de rayon $\frac{a}{4}$ roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon triple dont le centre, situé sur l'axe des y, a pour ordonnée $-\frac{a}{4}$; le point de contact du cercle qui roule, situé sur l'axe des y, a pour ordonnée, au départ, $-a$.

Cette courbe partage le plan en deux régions : pour les points de la région intérieure, pour le point $x = 0$, $y = -\frac{a}{2}$, par exemple, l'équation (7) a ses racines réelles, et par conséquent par chacun de ces points passent trois axes de paraboles réels; pour les points de la région extérieure, pour le point $x = \infty$, $y = 0$, par exemple, l'équation (7) a deux racines imaginaires, et par chacun de ces points passe un seul axe réel; quant aux points de la courbe, par chacun d'eux passent deux axes.

V. Le lieu des points pour lesquels deux des axes se coupent à angle droit s'obtient sans peine : soit (x, y) un pareil point; μ', μ'', μ''' les coefficients angulaires des axes passant par ce point. On a, par exemple,

$$\mu''\mu''' = -1.$$

Comme $\mu'\mu''\mu''' = \frac{y}{x}$, on en déduit $\mu' = -\frac{y}{x}$.

Écrivons que $-\frac{y}{x}$ est racine de l'équation (7), nous obtenons

$$y(2x^2 + 2y^2 + ay) = 0.$$

Le lieu est donc un cercle, car si $y = 0$, comme $\mu'\mu''\mu''' = \frac{y}{x}$, nous ne tenons pas compte, en somme, de la condition $\mu''\mu''' = -1$.

Nota. — Solution analogue par M. Barisien.

SUR LES RÉDUITES DES FRACTIONS CONTINUES SYMÉTRIQUES;

PAR M. G. MUSSO, à Gênes.

A la page 453 de sa *Théorie des nombres,* Edouard Lucas a donné la proposition suivante :

Quand une fraction continue est symétrique, on peut calculer les deux dernières réduites, si l'on connaît les deux dernières réduites qui correspondent à la première moitié de son développement.

Il a distingué deux cas, selon que la fraction est symétrique paire, ou impaire, c'est-à-dire de l'un des types

$$(1) \qquad \frac{f_n}{g_n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \ddots + \cfrac{1}{q_\nu + \cfrac{1}{q_\nu + \ddots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_0}}}}},$$

$$\frac{f_n}{g_n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \ddots + \cfrac{1}{q_\nu + \cfrac{1}{q_{\nu-1} + \ddots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_0}}}}},$$

et a trouvé, dans le premier cas,

$$(1)\qquad \begin{cases} f_n = f_\nu^2 + f_{\nu-1}^2, \\ g_n = f_\nu g_\nu + f_{\nu-1} g_{\nu-1} = f_{n-1}, \\ g_{n-1} = g_\nu^2 + g_{\nu-1}^2, \end{cases}$$

et, dans le second,

$$(2)\qquad \begin{cases} f_n = 2 f_\nu f_{\nu-1}, \\ g_n = f_\nu g_{\nu-1} + f_{\nu-1} g_\nu = f_{n-1}, \\ g_{n-1} = 2 g_\nu g_{\nu-1}. \end{cases}$$

Cependant, tandis que le premier système de relation subsiste réellement, le second est erroné. Cela, on le pourrait vérifier sur des exemples numériques; mais nous le déduirons moyennant la considération d'une fraction continue plus générale que celle des types (I), laquelle nous accorde de trouver des relations analogues aux (1), qui comprennent les (1) mêmes en particulier, et nous fournissent les vraies valeurs de f_n, g_n, f_{n-1}, g_{n-1}, dans le cas qu'il s'agisse d'une fraction continue symétrique impaire.

Que l'on considère la fraction continue du type

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{f_n}{g_n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cdots + \cfrac{1}{q_\nu + \cfrac{1}{q_{\nu+1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{\nu+r} + \cfrac{1}{q_\nu + \cdots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_0}}}}}}}.$$

Nous avons d'abord par la propriété de l'inversion

$$\frac{f_n}{g_n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cdots + \cfrac{1}{q_\nu + \cdots + \cfrac{1}{q_{\nu+r} + \cfrac{1}{\cfrac{f_\nu}{f_{\nu-1}}}}}},$$

et comme

$$\frac{f_{\nu+r}}{g_{\nu+r}} = \frac{q_{\nu+r} f_{\nu+r-1} + f_{\nu+r-2}}{q_{\nu+r} g_{\nu+r-1} + g_{\nu+r-2}},$$

il sera

$$\frac{f_n}{g_n} = \frac{\left(q_{\nu+r} + \frac{f_{\nu-1}}{f_\nu}\right) f_{\nu+r-1} + f_{\nu+r-2}}{\left(q_{\nu+r} + \frac{f_{\nu-1}}{f_\nu}\right) g_{\nu+r-1} + g_{\nu+r-2}}$$
$$= \frac{f_\nu f_{\nu+r} + f_{\nu-1} f_{\nu+r-1}}{f_\nu g_{\nu+r} + f_{\nu-1} g_{\nu+r-1}};$$

d'où résultent déterminées les valeurs de f_n et g_n.

Mais, par la propriété de l'inversion, nous avons encore

$$\frac{f_n}{g_n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \ddots + \cfrac{1}{q_\nu + \cfrac{1}{q_{\nu+r} + \ddots + \cfrac{1}{q_{\nu+1} + \cfrac{1}{q_\nu + \ddots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_0}}}}}}};$$

par conséquent,

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_\nu f_{\nu+r} + f_{\nu-1} f_{\nu+r-1}}{g_\nu f_{\nu+r} + g_{\nu-1} f_{\nu+r-1}}.$$

Enfin, puisque

$$f_n g_{n-1} - f_{n-1} g_n = (-1)^{n-1} = (-1)^{2(\nu-1)+r},$$

nous pourrons, moyennant la substitution en celle-ci des valeurs de f_n, f_{n-1} et g_n, déterminer g_{n-1}. On trouve

$$g_{n-1} = g_\nu g_{\nu+r} + g_{\nu-1} g_{\nu+r-1}.$$

En conclusion, on voit que pour les fractions continues du type (II) subsiste le système suivant de rela-

tions

$$(3)\quad \begin{cases} f_n = f_\nu f_{\nu+r} + f_{\nu-1} f_{\nu+r-1}, \\ f_{n-1} = g_\nu f_{\nu+r} + g_{\nu-1} f_{\nu+r-1}, \\ g_n = f_\nu g_{\nu+r} + f_{\nu-1} g_{\nu+r-1}, \\ g_{n-1} = g_\nu g_{\nu+r} + g_{\nu-1} g_{\nu+r-1}; \end{cases}$$

et nous pourrons par conséquent calculer les deux dernières réduites $\frac{f_{n-1}}{g_{n-1}}$, $\frac{f_n}{g_n}$, seulement quand l'on connaît les quatre suivantes

$$\frac{f_{\nu-1}}{g_{\nu-1}},\quad \frac{f_\nu}{g_\nu},\quad \frac{f_{\nu+r-1}}{g_{\nu+r-1}},\quad \frac{f_{\nu+r}}{g_{\nu+r}}.$$

Mais les relations (3) comprennent encore comme cas particulier celles du système (1) données par Lucas (il suffit de faire $r = 0$), et donnent enfin les vraies relations qui devraient former le système (2), en faisant $r = 1$. On trouve en effet, par cette dernière hypothèse,

$$(2')\quad \begin{cases} f_n = f_\nu f_{\nu+1} + f_{\nu-1} f_\nu, \\ f_{n-1} = g_\nu f_{\nu+1} + g_{\nu-1} f_\nu = f_\nu g_{\nu+1} + f_{\nu-1} g_\nu = g_n, \\ g_{\nu-1} = g_\nu g_{\nu+1} + g_{\nu-1} g_\nu. \end{cases}$$

Nous pourrons conséquemment conclure : que la proposition énoncée par Lucas subsiste seulement pour les fractions continues symétriques paires, et que, s'il s'agit de fractions continues symétriques impaires, on peut calculer les deux dernières réduites, seulement si l'on connaît les trois suivantes

$$\frac{f_{\nu-1}}{g_{\nu-1}},\quad \frac{f_\nu}{g_\nu},\quad \frac{f_{\nu+1}}{g_{\nu+1}}.$$

SUR L'EMPLOI DE LA MULTIPLICATION EXTÉRIEURE EN ALGÈBRE;

PAR M. H. FEHR.

1. Dans le t. X des *Nouvelles Annales,* M. Carvallo ([1]), après avoir défini très clairement la multiplication extérieure, a donné, à l'aide de cette notion, une exposition fort simple de la théorie des déterminants. La notion de produit symbolique, due à Cauchy et à Grassmann, joue un rôle fondamental dans la méthode de ce dernier. Elle a été employée avec succès par M. F. Caspary ([2]), qui a su faire ressortir, d'une façon très nette, les avantages que pouvait offrir, en Géométrie, l'emploi de la multiplication extérieure. En Algèbre, ce procédé de calcul est également d'un usage très fécond. C'est ce que je me propose de montrer dans cette Note, en me bornant simplement à la résolution d'un système d'équations linéaires et à l'élimination d'après Sylvester. Enfin j'exposerai brièvement la notion d'invariance d'une forme algébrique.

2. Rappelons simplement que la multiplication extérieure repose sur la *convention unique* que le produit

([1]) *Nouvelles Annales,* 3e série, t. X, p. 219-224, 341-345; 1891. Dans le t. XI, le même auteur présente, avec une remarquable clarté d'exposition, les principes essentiels de la méthode de Grassmann. *Voir* aussi le *Bull. de la Soc. math.*, t. XV, p. 158-166.

([2]) *Bull. des Sciences math.,* 2e série, t. XI, p. 222-242; 1887. *Voir* surtout dans le t. XIII, p. 202-240, son Mémoire intitulé : *Sur une méthode générale de la Géométrie qui forme le lien entre la Géométrie synthétique et la Géométrie analytique.*

des quantités $e_1, e_2, \ldots, e_m$, appelées *unités*, change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs, et que, par conséquent, tout produit renfermant deux fois la même unité est nul.

On vérifie sans peine que ces propriétés s'étendent encore aux quantités

$$p_i = \alpha_{i,1} e_1 + \alpha_{i,2} e_2 + \ldots + \alpha_{i,m} e_m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

fonctions linéaires des e_i.

En particulier, si $n = m$, on arrive à la *définition des déterminants* donnée par M. Carvallo

$$[p_1 p_2 \ldots p_m] = \Delta [e_1 e_2 \ldots e_m],$$

le crochet [ ] étant, suivant la notation de Grassmann, le symbole de la multiplication extérieure. Comme on peut toujours supposer les e_i tels que l'on ait

$$[e_1 e_2 \ldots e_m] = 1,$$

le déterminant formé par les $\alpha_{i,k}$ sera représenté par

$$\Delta = [p_1 p_2 \ldots p_m].$$

Le choix des unités dépend des applications que l'on a en vue. En Algèbre, on peut les considérer comme de simples quantités auxiliaires. Cauchy (¹) leur a donné le nom de *clefs algébriques*.

3. *Résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues* (²). — Soit le système

$$(1) \qquad a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \ldots + a_{i,n} x_n = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Multiplions ces équations respectivement par $e_1, e_2, \ldots,$

(¹) Cauchy, *Exercices*, t. IV, p. 356; 1847, et *Comptes rendus*, 1853.

(²) *Voir* Grassmann, *Ausdehnungslehre*, A₁, §§ 45, 46.

e_n et additionnons membre à membre. Nous obtiendrons, en posant

$$(2)\quad \begin{cases} a_{1,k}e_1 + a_{2,k}e_2 + \ldots + a_{n,k}e_n = p_k & (k = 1, 2, \ldots, n), \\ b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots + b_n e_n = p, \end{cases}$$

l'équation unique

$$(3)\qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = p$$

qui peut remplacer le système (1). On retrouve une équation de ce système, par exemple celle de rang i, en faisant $e_i = 1$, et les autres quantités e égales à zéro.

De l'équation (3) on déduit immédiatement, à l'aide de la multiplication extérieure, la valeur de l'une quelconque des inconnues. Ainsi on obtient x_1 en multipliant les deux membres de cette équation par

$$[p_2 p_3 \ldots p_n];$$

d'où

$$[p_1 p_2 \ldots p_n] x_1 = [p p_2 p_3 \ldots p_n].$$

En effet, les autres termes, renfermant chacun deux fois le même facteur p_i, disparaissent. D'une façon générale, nous aurons, pour la valeur de x_i, la relation simple

$$x_i = \frac{[p p_1 p_2 \ldots p_n]}{[p_1 p_2 \ldots p_n]}.$$

Si, comme plus haut, nous supposons $[e_1 e_2 \ldots e_n] = 1$, le dénominateur représentera le déterminant du système. On reconnaît l'analogie de ce procédé avec la méthode ordinaire.

Résultant du système. — Supposons les quantités b_1 égales à zéro, le résultant du système proposé sera exprimé par

$$[p_1 p_2 \ldots p_n] = 0.$$

4. *Élimination.* — La multiplication extérieure facilite tout particulièrement le calcul dans le cas de la

méthode de Sylvester. Proposons-nous donc d'éliminer x entre les deux équations

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$
$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0,$$

dans lesquelles les a et les b sont des fonctions des autres variables, ou des quantités constantes, a_m et b_n étant différents de zéro.

Multiplions la première équation successivement par $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, et la seconde par $1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$. Il en résultera un système de $m+n$ équations entre lesquelles nous pourrons éliminer les $m+n-1$ quantités $x, x^2, \ldots, x^{m+n-1}$ considérées comme inconnues indépendantes.

C'est ici que s'applique avec avantage la méthode de Grassmann ([1]). En effet, si nous additionnons ces $m+n$ équations, après les avoir multipliées respectivement par $e_1, e_2, \ldots, e_{m+n}$, nous aurons l'équation unique

$$p_1 x^{m+n-1} + p_2 x^{m+n-2} + \ldots + p_{m+n-1} x + p_{m+n} = 0,$$

dans laquelle les quantités p_i sont des fonctions linéaires des e. Multiplions les deux membres de cette relation par $[p_1 p_2 \ldots p_{m+n-1}]$, il restera simplement l'expression

$$[p_1 p_2 \ldots p_{m+n}] = 0$$

qui est le résultant des deux équations proposées. Ce n'est évidemment qu'une forme abrégée du déterminant de Sylvester, ce que l'on reconnaît facilement, d'après la méthode de M. Carvallo.

5. *La notion d'invariance.* — Considérons la forme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_m e_m$$

([1]) *Loc. cit.*, § 93.

et supposons que l'on ait $[e_1 e_2 \ldots e_m] = 1$. Si nous effectuons sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ la substitution linéaire

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\ \xi_1 + a_{12}\ \xi_2 + \ldots + a_{1m}\ \xi_m, \\ x_2 &= a_{21}\ \xi_1 + a_{22}\ \xi_2 + \ldots + a_{2m}\ \xi_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= a_{m1}\xi_1 + a_{m2}\xi_2 + \ldots + a_{mm}\xi_m, \end{aligned}$$

le module de la transformation étant égal à un, la forme x devient

$$x = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \ldots + \xi_m \varepsilon_m,$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ forment un nouveau système d'unités exprimées linéairement en fonction des anciennes. Elles sont données par la substitution *inverse*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{11}\ e_1 + a_{21}\ e_2 + \ldots + a_{m1}\ e_m, \\ \varepsilon_2 &= a_{12}\ e_2 + a_{22}\ e_2 + \ldots + a_{m2}\ e_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon_m &= a_{1m} e_1 + a_{2m} e_2 + \ldots + a_{mm} e_m. \end{aligned}$$

Et, puisque le module a été pris égal à l'unité, nous avons $[\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_m] = [e_1 e_2 \ldots e_m] = 1$.

Nous arrivons donc à la remarque importante qu'une transformation linéaire des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ revient à un simple changement d'unités. On est immédiatement conduit à la définition très simple que :

Les formes invariantes sont celles qui ne changent pas pour une transformation linéaire des unités.

Cette définition est d'un caractère très général, vu qu'elle comprend à la fois les invariants, les covariants, les contrevariants et les autres formes analogues.

A l'aide de la multiplication extérieure, toute fonction homogène $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ peut être ramenée

à la forme abrégée [1]

$$f = ax^n,$$

où l'on a

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_m e_m.$$

Cette notation diffère peu de celle d'Aronhold, généralement usitée en Allemagne, où l'on pose

$$f = a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots)^n.$$

On a, par exemple, pour la forme quadratique binaire dans l'un des systèmes

$$f = ax^2 = a(x_1 e_1 + x_2 e_2)^2 = ae_1^2 x_1^2 + 2ae_1 e_2 x_1 x_2 + ae_2^2 x_2^2,$$

tandis qu'on a dans l'autre

$$f = a_x^2 = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 = a_1^2 x_1^2 + 2a_1 a_2 x_1 x_2 + a_2^2 x_2^2.$$

Mais si la notation d'Aronhold est purement symbolique, celle de Grassmann paraît tout à fait intuitive et présente ce grand avantage de permettre une interprétation géométrique immédiate.

Dans un de ses derniers Mémoires [2], Grassmann montre encore les liens étroits qui existent entre sa méthode et l'Algèbre moderne. Du reste, son Ouvrage de 1844 renferme les germes de la théorie des formes algébriques, telle qu'elle a été développée en Allemagne par Aronhold, Clebsch et Gordan.

---

(1) *Voir* la démonstration dans l'Ouvrage de Grassmann, A_2, § 358. Consulter aussi le Traité de M. Schlegel (*Algèbre*, Leipzig, 1875), établi sur les principes de Grassmann. L'auteur consacre une place importante à un exposé élémentaire des formes binaires et ternaires.

(2) *Math. Annalen*, t. VII, p. 538; 1874. *Voir* aussi p. 12 du même tome.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité d'Algèbre. Compléments, par *H. Laurent*, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Quatrième Partie : Théorie des polynomes a plusieurs variables. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894. In-8° de IV-56 pages. Prix : 1fr,50.

Les Traités d'Algèbre supérieure contiennent la théorie des fonctions algébriques inverses et des substitutions, ou la théorie des transformations que l'on peut faire subir aux fonctions entières, sans en altérer certaines propriétés essentielles. Aucune de ces théories n'est abordée dans ce petit opuscule, dont le but, très modeste, est de compléter l'Algèbre élémentaire enseignée officiellement, en étudiant les propriétés fondamentales des polynomes à plusieurs variables, et en essayant de généraliser les propriétés connues des polynomes à une variable.

On y trouve une théorie complète de l'élimination et des fonctions symétriques, fondée entièrement sur un théorème de Jacobi, qui a déjà rendu des services dans l'analyse des fonctions abéliennes, et qui est appelé à en rendre encore beaucoup d'autres.

L'auteur croit avoir considérablement simplifié la théorie de l'élimination, assez, pense-t-il, pour la mettre à la portée de toutes les personnes qui ont suivi un Cours de Mathématiques spéciales.

Essai d'une théorie élémentaire des surfaces du troisième ordre, par *F. Dumont*, professeur au lycée d'Annecy. Annecy, Joseph Dépollier et Cie; 1894. In-8° de 176 pages.

C'est une étude intéressante des propriétés déjà connues des surfaces du 3e ordre, auxquelles l'auteur a ajouté les résultats de

ses recherches personnelles. Pour la rapidité de l'exposition, les démonstrations analytiques ont été mêlées aux raisonnements géométriques. Voici la composition des Chapitres : Les droites de la surface générale du troisième ordre. Principaux modes de génération. Surfaces à singularités et surfaces anallagmatiques du troisième ordre. Généralités sur les pôles et polaires dans les surfaces du troisième ordre. Propriétés de la hessienne. Représentation sur un plan. Intersection d'une surface cubique avec un plan, une quadrique ou une seconde surface cubique. Éléments d'une classification.

Annuaire pour l'an 1895, publié par le Bureau des Longitudes, avec des Notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1895. In-18 de IV-826 pages, avec deux cartes magnétiques. Prix : broché, $1^{fr},50$; cartonné, 2^{fr}.

Comme tous les ans à pareille époque, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* vient de paraître. L'Annuaire pour 1895 renferme une foule de renseignements pratiques réunis dans ce petit Volume pour la commodité des travailleurs. On y trouve également des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes : *Les Ondes atmosphériques lunaires;* par M. Bouquet de la Grye. — *Sur le Congrès géodésique d'Insprück;* par M. F. Tisserand. — *L'observatoire du mont Blanc;* par M. J. Janssen. — *La Photométrie photographique;* par M. J. Janssen. — *Rapport sur les propositions d'unification des jours astronomique et civil;* par M. H. Poincaré.

Leçons de Cinématique professées à la Faculté des Sciences de Paris, par *Gabriel Kœnigs,* chargé d'un cours de Cinématique à la Sorbonne, professeur suppléant au Collège de France, maître de conférences à l'École Normale supérieure. Paris, A. Hermann; 1895. Grand in-8°. Un premier fascicule de VIII-240 pages

avec 62 figures dans le texte a paru. Le second et dernier fascicule paraîtra en janvier 1895. Prix : 12fr.

Ce Livre représente, avec les développements que j'ai cru nécessaires, le cours que je professe depuis sept ou huit ans, soit à l'École Normale, soit à la Faculté des Sciences de Paris.

Dans un ordre d'idées où l'Analyse et la Géométrie ont tour à tour fait leurs preuves, le choix des méthodes pourrait sembler n'être qu'une question d'école; s'il est vrai qu'il se trouve encore des mathématiciens pour bannir systématiquement de leurs écrits, les uns l'Analyse, les autres la Géométrie, ce système d'exclusion absolue, quel qu'en fût le sens et le caractère, ne m'a pas semblé convenir à un enseignement véritablement scientifique. Malgré les redites auxquelles on s'expose en revenant sur ce lieu commun de la prétendue rivalité entre l'Analyse et la Géométrie, qui paraît bien plutôt être celle des analystes et des géomètres, faut-il rappeler quelles complications entraîne l'analyse pratiquée sans précautions; combien il est faux de penser qu'elle suffit à tout donner, pourvu que l'on s'y abandonne. La méthode géométrique a les avantages de la vue directe et de la rapidité des solutions dans quelques cas choisis; souvent aussi elle constitue un procédé d'exposition et de synthèse, très propre à mettre en relief, après coup, les rapports cachés des choses. Mais ce succès n'est pas assuré. On nous parle des problèmes où elle a réussi; on ne nous dit rien de ceux où elle a échoué. En Géométrie infinitésimale surtout, où le problème se traduit par une équation différentielle, il faut avoir sous la main une méthode plus sûre, qui, tout en suivant pas à pas les indications de la Géométrie, puisse la suppléer à l'instant où elle se dérobe; une méthode, surtout, où la question des signes des éléments, *si essentielle à la précision,* ne fasse jamais un doute. On ne saurait croire combien ces questions de signes deviennent délicates dans la Géométrie livrée à elle-même. Il fallait donc introduire dans ces questions une méthode ayant la précision et la rigueur de l'analyse, donnant au temps voulu les équations différentielles, qui concentrent sur elles et précisent toutes les difficultés du problème, et manifestent si souvent des parentés entre des problèmes d'origines très éloignées. Et cependant, cette méthode devait à chaque pas s'inspirer des faits géométriques, tout en écartant

les inconvénients inhérents à l'emploi des coordonnées ordinaires.

L'usage d'un trièdre de référence mobile, choisi de la manière la plus appropriée, offre tous ces avantages. Entre les mains d'Albert Ribaucour et de M. Darboux, il est devenu un instrument de découvertes. Il était donc naturel d'introduire le trièdre de référence mobile en Cinématique, et de familiariser ainsi de bonne heure les étudiants avec la méthode la plus sûre et la plus puissante qui soit en Géométrie infinitésimale.

Nous n'ignorons pas que la synthèse géométrique se prête avec une rare élégance à l'exposition des faits les plus essentiels de la Cinématique; mais nous estimons qu'un professeur qui se borne à démontrer et à exposer, sans fournir en même temps à ses élèves des moyens pratiques d'investigation, n'a rempli qu'une faible partie de sa tâche. Un enseignement qui se confine dans un cadre fermé, et qui se contente de moyens qui n'en sortent pas, ne saurait être un enseignement scientifique. Or l'emploi du trièdre mobile constitue une méthode de recherches, pouvant atteindre à tout, avec autant d'élégance que de sûreté.

On verra que j'ai commencé par développer la théorie abstraite et purement géométrique des segments. Il le fallait bien, puisque cette théorie n'a pas encore pénétré dans l'enseignement élémentaire. Quant à la mêler à l'exposition même des faits cinématiques, il y a là le même inconvénient qu'à noyer la Cinématique dans la Dynamique, ainsi que cela s'est longtemps pratiqué.

La tâche du géomètre est, non seulement de découvrir des faits nouveaux, mais encore de classer les vérités acquises, et de grouper ensemble les idées d'un même ordre. La théorie des segments appartient à la Géométrie, elle trouve en Statique et en Cinématique deux applications importantes; elle peut en avoir d'autres.

La Cinématique tout entière repose sur le théorème de la composition des vitesses et sur l'expression de la vitesse d'entraînement d'un point d'un corps solide en mouvement. J'ai déduit ces faits par l'analyse, qui constitue pour les établir la plus simple et la plus naturelle des méthodes. L'interprétation

des formules, faite avec le soin nécessaire, conduit au résultat classique du mouvement hélicoïdal tangent. Plus d'un trouvera cette méthode un peu indirecte, et, cependant, n'est-elle pas la plus conforme à la réalité des faits? Ne met-elle pas mieux en lumière ce qu'il y a d'artificiel et de voulu dans cette décomposition du mouvement infiniment petit, en rotation autour d'axes conjugués? Ces rotations n'existent pas en réalité, et ce n'est qu'au point de vue des vitesses que *tout se passe comme si* elles existaient. J'ai tenu cependant à exposer aussi les principes de la méthode géométrique directe.

L'emploi du trièdre mobile conduit en quelques lignes aux formules de Bour et au théorème de Coriolis. J'en ai déduit les applications classiques aux courbures dans le mouvement d'une figure plane, et dans le mouvement autour d'un point fixe. J'ai, à propos du mouvement d'une figure plane, indiqué les principes d'une méthode propre à faire connaître la forme d'une trajectoire dans le voisinage d'un de ses points.

Dans le mouvement général d'une figure, j'ai insisté, plus qu'on ne le fait habituellement, sur la question intéressante du roulement des courbes gauches dans l'espace.

Enfin, les déplacements à plusieurs paramètres ont acquis dans ces derniers temps une telle importance, que j'ai cru devoir leur consacrer tout un chapitre.

La théorie des mécanismes est généralement méconnue en France. On en est encore ou à très peu près à la classification empirique de Monge. Cependant le beau traité de Reuleaux, publié en 1877, contient les germes d'une théorie scientifique, devant laquelle les mathématiciens purs ne sauraient rester indifférents. Adoptant, avec quelques modifications, les principes de Reuleaux, j'ai développé en premier lieu la théorie des systèmes articulés, puis celle des mécanismes, et comme applications je me suis occupé des engrenages, cames et excentriques.

Quelques Notes terminales sont consacrées à des questions qui ne pouvaient trouver place dans le corps même de l'Ouvrage.

J'aurais voulu faire précéder ce Livre d'une histoire de la Cinématique; mais le temps m'a manqué pour les nombreuses recherches auxquelles j'aurais été entraîné. La Cinématique a des aspects multiples; les uns géométriques, les autres mécaniques, et même d'ordre industriel. A ce dernier point de vue

j'ai cité Reuleaux; pour les questions géométriques tout le monde connaît les travaux de M. Resal.

Il serait injuste d'oublier ce que l'enseignement de la Cinématique doit à mes vénérés maîtres : Bouquet, Darboux, Tannery. Ils ont apporté dans l'étude des questions cinématiques cette rigueur et cette précision inséparables de toute véritable science. M. Tannery notamment, par un enseignement de plusieurs années à la Faculté des Sciences, a exercé la plus salutaire influence. Il a montré le vrai parti que l'on peut tirer de l'étude des accélérations dans la théorie des courbures, et bien mis en relief ce fait, qu'on paraît trop disposé à perdre de vue, que le temps en Cinématique n'est qu'une variable auxiliaire quelconque, en sorte que la Cinématique n'est, à proprement parler, que la Géométrie du déplacement.

Je me fais un plaisir, en terminant cette introduction, d'adresser mes affectueux remerciements à deux de mes élèves de l'École Normale, MM. Cotton et Marijon, qui ont bien voulu m'aider dans la rédaction des premiers Chapitres; mes remerciements à mon excellent ami M. Hermann, qui a apporté à la publication de ce Livre un empressement et un soin tout particuliers. G. Koenigs.

Exercices d'Arithmétique. Énoncés et solutions, par *J. Fitz-Patrick*, ancien professeur de Mathématiques, et *Georges Chevrel*, directeur de l'institution Charlemagne à Tours, avec une Préface de M. *Jules Tannery*, sous-directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure. Paris, A. Hermann; 1893. Grand in-8° de IX-490 pages. Prix : 10fr.

L'Ouvrage que M. Hermann vient de publier n'a pas de similaire dans notre littérature scientifique. Il existe un grand nombre de recueils de problèmes d'Arithmétique avec ou sans solutions, mais ces recueils, dont plusieurs ne manqnent pas d'intérêt, se rapportent à l'Arithmétique pratique. Le recueil que publie M. Hermann renferme un certain nombre de pro-

blèmes numériques, mais surtout des exercices théoriques sur les différentes parties de l'Arithmétique.

L'Ouvrage contenant près de cinq cents exercices, il est difficile de donner en quelques mots un aperçu de ce qu'il renferme, mais nous pouvons dire avec M. Tannery que, dans chacun des seize Chapitres qui composent l'Ouvrage, les exercices sont parfaitement gradués et les solutions simples et élégantes. Les auteurs ne se sont pas bornés à faire un choix de problèmes et à reproduire les solutions publiées dans divers recueils scientifiques; la plupart des solutions leur sont personnelles, et, ce qui est excellent dans un livre d'enseignement, la plupart des questions sont résolues à l'aide d'un petit nombre de méthodes, toujours par la voie la plus simple et la plus naturelle. On a évité avec grand soin ces solutions qu'on pourrait appeler *artificielles,* qui conduisent au but à l'aide de transformations inattendues et bizarres, et qui, par cela même que leur point de départ ne peut être pressenti et prévu, ne sont véritablement que des demi-solutions.

Les deux derniers Chapitres ont une étendue plus considérable que les autres. Le Chapitre XV, intitulé : *Questions diverses,* renferme la solution des diverses questions qui n'auraient pu trouver leur place dans les Chapitres précédents : problèmes de concours, notions sur les nombres figurés, les nombres triangulaires, quadrangulaires, pentagones, etc. Le Chapitre XVI est intitulé : *Notions élémentaires sur la théorie des nombres;* c'est une véritable introduction à la théorie des nombres encore assez étendue, qui facilitera la lecture des ouvrages et mémoires parus sur le même sujet.

En résumé, l'ouvrage de MM. Fitz-Patrick et Chevrel est un ouvrage destiné à rendre les plus grands services aux candidats aux Ecoles, aux professeurs à qui il fournira une source presque inépuisable d'exercices à proposer. Ceux qui voudront se faire une idée plus complète du Livre pourront consulter le remarquable article que lui a consacré M. Kœnigs dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Darboux.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Note sur les Approximations numériques, par M. *Guyou*, capitaine de frégate, examinateur d'admission à l'École navale. 2e édition. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-8° de 32 pages. Prix : 0fr,75.

Problèmes d'Électricité pratique, par le Dr *Filippo Cintolesi*, professeur de Physique à l'Institut royal technique de Livourne. Traduits de l'italien par *Félix Leconte*. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. In-18 jésus de 160 pages, avec une planche. Prix : 3fr.

Théorie mécanique de la Chaleur, par *R. Clausius*. 2e édition, refondue et complétée, traduite sur la 3e édition de l'original allemand, par *F. Folie* et *E. Ronkar*, chargés de cours à l'Université de Liège. Tome premier : Développement des formules qui se déduisent des deux principes fondamentaux, avec différentes applications. Tome deuxième : Théorie mécanique de l'Électricité, y compris l'application des principes fondamentaux de la Théorie mécanique de la chaleur. Mons, Hector Manceaux. Paris, Gauthier-Villars; 1893. In-8° de vii-500 pages et de ii-472 pages. Prix : 20fr.

Les courants polyphasés, par *J. Rodet* et *Busquet*, ingénieurs des Arts et Manufactures. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. Gr. in-8° de 182 pages, avec 71 figures dans le texte. Prix 3fr, 50.

Cours élémentaire de Machines a vapeur, par *V. Foulon*, ingénieur des Ponts et Chaussées. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. In-8° de 243 pages, avec 216 figures dans le texte. Prix : 5fr.

Cours de Calcul différentiel et intégral, par *Paul Haag*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique. Paris, Vve Ch. Dunod; 1893. Gr. in-8° de viii-612 pages, avec figures dans le texte. Prix : 12fr.

Cours de Mécanique rationnelle, par *Paul Haag*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique. Paris, Vve Ch. Dunod et P. Vicq; 1894. Gr. in-8° de viii-552 pages, avec figures dans le texte. Prix : 12fr.

Cours de Calcul différentiel et intégral, par *J.-A. Serret*, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. Quatrième édition, augmentée de Notes sur la théorie des fonctions elliptiques, par M. *Ch. Hermite*. Tome premier : Calcul différentiel. Tome second : Calcul intégral. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894. In-8° de xiv-618 pages et de xiv-904 pages, avec figures dans le texte. Prix : 25fr.

Leçons sur la Théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal, par *Gaston Darboux*, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences. Troisième Partie : Lignes géodésiques et Courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894. Grand in-8° de VIII-512 pages, avec 81 figures dans le texte. Prix : 15fr.

Questions d'Algèbre, à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales et des candidats aux Écoles Polytechnique, Normale, centrale; par *Georges Maupin*, licencié ès sciences mathématiques et physiques, membre de la Société mathématique de France, avec une Préface de M. *C.-A. Laisant*, docteur ès sciences. Paris, Nony et Cie; 1895. Grand in-8° de VIII-292 pages, avec une planche et figures dans le texte. Prix : 2fr.

Essais de Psychologie et de Métaphysique positives. Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques, par *Gabriel Arnoux*, ancien officier de Marine. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894. Grand in-8° de XXIV-176 pages, avec figures et une planche en couleur. Prix : Hollande 12fr, vélin 6fr.

Récréations mathématiques, par M. *Edouard Lucas*. Tome IV : Le calendrier perpétuel. L'Arithmétique en boules. L'Arithmétique en batons. Les mérelles au XIIIe siècle. Les carrés magiques de Fermat. Les réseaux et les dominos. Les régions et les quatre couleurs. La machine a marcher. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894. Petit in-8° de VIII-266 pages. Caractères elzévirs, titres en deux couleurs. Prix : Hollande 12fr; vélin 7fr, 50.

Logica matématica, par *C. Burali-Forti*, professor nella R. Accademia militare di Torino. Milano, Ulrico Hoepli; 1894. Petit in-8° de VI-158 pages. Prix : 1fr, 50.

Bulletin de Mathématiques spéciales, publié sous la direction de *B. Niewenglowski*, docteur ès sciences, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand. N° 1. Octobre 1894. Paris, Société d'éditions scientifiques; 1894. In-8° de 16 pages. Prix : 0fr, 60.

Trigonométrie, à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement secondaire classique et moderne, par *L. Gérard*, docteur ès sciences, professeur au lycée de Lyon. Paris, Société d'éditions scientifiques; 1895. In-18 de 72 pages. Prix : 1fr, 25.

Introduction a l'étude de la théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure, par *Émile Borel* et *Jules Drach*, d'après des Conférences faites à l'École Normale supérieure, par M. *Jules Tannery*, sous-directeur des études scientifiques. Paris, Nony et Cie; 1895. In-8° de X-350 pages. Prix : 10fr.

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE;

PAR M. LE CAPITAINE E. BARISIEN,
du Service géographique de l'Armée.

Le but de cette Note est de donner quelques formules permettant de trouver l'aire, le rayon de courbure et la rectification des podaires successives d'une courbe, sans avoir besoin de connaître les équations de ces podaires. Nous étudierons aussi, accessoirement, quelques courbes dérivées de ces podaires.

Aire de la $m^{ième}$ podaire. — Soit O le point d'émission des podaires, que nous prenons pour pôle des coordonnées polaires, et désignons par

$$r = f(\theta)$$

l'équation polaire de la courbe fondamentale.

Étudions d'abord la première podaire. Si P_1 est le point de la première podaire correspondant au point M de la courbe et si r_1 et θ_1 sont les coordonnées polaires de ce point P_1, on aura pour la différentielle de l'aire U_1 de cette première podaire

$$(1) \qquad dU_1 = \tfrac{1}{2} r_1^2 \, d\theta_1.$$

Nous allons calculer r_1 et θ_1 en fonction de θ. Pour cela, désignons par V l'angle du rayon vecteur OM avec la tangente à la courbe en M, nous avons

$$(2) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

et

$$V = \theta_1 - \theta + \frac{\pi}{2}.$$

En différentiant cette dernière équation par rapport à θ, il vient

$$(3) \qquad \frac{d\theta_1}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta}.$$

En différentiant (2) par rapport à θ, on obtient

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Si, pour abréger l'écriture, on pose

$$\frac{dr}{d\theta} = r', \qquad \frac{d^2r}{d\theta^2} = r'',$$

on a alors

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2},$$

et, par suite, en portant cette valeur dans (3),

$$\frac{d\theta_1}{d\theta} = 1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

D'autre part, le triangle OMP_1 donne

$$r_1 = r \sin V = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

La formule (1) devient alors

$$(4) \qquad \frac{dU_1}{d\theta} = \frac{1}{2} r_1^2 \frac{d\theta_1}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{r^4(r^2 + 2r'^2 - rr'')}{(r^2 + r'^2)^2}.$$

Pour avoir l'aire U_1 on n'aura donc qu'à intégrer une fonction de θ, et, le plus souvent, lorsque la courbe $r = f(\theta)$ aura une aire U_0 intégrable, telle que

$$\frac{dU_0}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2,$$

la podaire aura aussi une aire intégrable. On obtiendra donc l'aire U_1 sans avoir besoin de connaître l'équation de la podaire, laquelle peut être d'un degré fort élevé et, par cela même, rendre difficile la recherche directe de l'aire de la podaire.

Pour avoir le point P_2 de la seconde podaire, correspondant au point P_1 de la première, on prend le milieu C de OM et l'on joint P_1C qui est la normale à la première podaire en P_1 : on n'a donc qu'à abaisser de O la perpendiculaire sur la tangente en P_1 pour avoir le point P_2.

Il est à remarquer que l'angle P_2OP_1 est égal à l'angle P_1OM dont la valeur est $(\theta_1 - \theta)$. Si θ_2 et r_2 sont les coordonnées du point P_2, on a

$$\theta_2 = 2(\theta_1 - \theta) + \theta$$

et

$$r_2 = r_1 \sin V = r \sin^2 V.$$

D'une manière plus générale, si r_m et θ_m sont les coordonnées du point P_m de la $m^{\text{ième}}$ podaire, on aura

$$\theta_m = m(\theta_1 - \theta) + \theta = m\left(V - \frac{\pi}{2}\right) + \theta,$$

d'où, en différentiant par rapport à θ,

$$(5) \qquad \frac{d\theta_m}{d\theta} = m\frac{dV}{d\theta} + 1 = m\left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 - r'^2}\right) + 1.$$

D'autre part,

$$(6) \qquad r_m = r_{m-1}\sin V = r\sin^m V = r\left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\right)^m.$$

Or, la différentielle de l'aire U_m de la $m^{\text{ième}}$ podaire est

$$\frac{dU_m}{d\theta} = \frac{1}{2} r_m^2 \frac{d\theta_m}{d\theta}.$$

Par conséquent, en y portant les valeurs (5) et (6), il

vient

$$(7)\qquad \frac{dU_m}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{r^2}{r^2 + r'^2}\right)^m \left[1 + m\left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right)\right].$$

Rayon de courbure de la $m^{ième}$ podaire. — Si R_m désigne ce rayon de courbure, on a

$$(8)\qquad R_m = \frac{(r_m^2 + r_m'^2)^{\frac{3}{2}}}{r_m^2 + 2r_m'^2 - r_m r_m''},$$

formule dans laquelle

$$r'_m = \frac{dr_m}{d\theta_m}, \qquad r''_m = \frac{d^2 r_m}{d\theta_m^2}.$$

Or, d'après (6),

$$r_m = \frac{r^{m+1}}{(r^2 + r'^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

En différentiant par rapport à θ_m et tenant compte de (5), on obtient

$$r'_m = \frac{dr_m}{d\theta}\,\frac{d\theta}{d\theta_m} = \frac{r' r^m}{(r^2 + r'^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

Par suite,

$$(9)\qquad r_m^2 + r_m'^2 = \frac{r^{2m}}{(r^2 + r'^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

Au lieu de calculer r''_m, remarquons que

$$\frac{r_m}{r'_m} = \frac{r}{r'},$$

et différentions par rapport à θ_m, il vient

$$\frac{r_m'^2 - r_m r''_m}{r_m'^2} = \frac{r'^2 - rr''}{r'^2}\,\frac{d\theta}{d\theta_m}.$$

D'où

$$(10)\qquad r_m'^2 - r_m r''_m = \frac{r^{2m}(r'^2 - rr'')}{(r^2 + r'^2)^{m-1}\left[r^2 + (m-1)r'^2 - mrr''\right]}.$$

En ajoutant (9) et (10), on obtient la valeur du dénominateur de R_m. On a donc ainsi pour R_m

$$(11) \qquad R_m = \frac{r^m}{(r^2+r'^2)^{\frac{m-1}{2}}}\left[\frac{r^2+r'^2+m(r'^2-rr'')}{r^2+r'^2+(m+1)(r'^2-rr'')}\right].$$

Pour $m=1$, on a

$$R_1 = r\left[\frac{r^2+r'^2+(r'^2-rr'')}{r^2+r'^2+2(r'^2-rr'')}\right],$$

expression que l'on peut écrire

$$R_1 = \frac{r}{2-\dfrac{(r^2+r'^2)}{r^2+2r'^2-rr''}}.$$

Or, le rayon de courbure R_0 de la courbe fondamentale a pour valeur

$$R_0 = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}.$$

On a aussi

$$\sin V = \frac{r}{(r^2+r'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Donc

$$R_0 \sin V = r\frac{(r^2+r'^2)}{r^2+2r'^2-rr''}.$$

Il en résulte donc la formule suivante pour le rayon de courbure de la première podaire

$$R_1 = \frac{r^2}{2r-R_0\sin V}.$$

C'est, aux notations près, la formule démontrée par M. Husquin de Rhéville (*Nouvelles Annales*, p. 141; 1890).

On peut, du reste, généraliser cette formule pour le rayon de courbure R_m. R_0 peut s'écrire

$$R_0 = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{(r^2+r'^2)+(r'^2-rr'')},$$

et comme

$$r^2 + r'^2 = \frac{r^2}{\sin^2 V},$$

on en déduit

$$r'^2 - rr'' = \frac{r^2(r - R_0 \sin V)}{R_0 \sin^3 V}.$$

Portant ces valeurs de $(r^2 + r'^2)$ et $(r'^2 - rr'')$ dans l'équation (11), on obtient

$$R_m = r \sin^{m-1} V \left[\frac{mr - (m-1) R_0 \sin V}{(m+1) r - m R_0 \sin V}\right].$$

On a donc

$$R_1 = \frac{r^2}{2r - R_0 \sin V},$$

$$R_2 = r \sin V \left[\frac{2r - R_0 \sin V}{3r - 2 R_0 \sin V}\right],$$

$$R_3 = r \sin^2 V \left[\frac{3r - 2 R_0 \sin V}{4r - 3 R_0 \sin V}\right],$$

. . . . . .

et, pour le produit des m premiers rayons de courbure, on obtient la formule simple suivante

$$R_1 R_2 R_3 \ldots R_m = \frac{r^{m+1} \sin^{\frac{m(m-1)}{2}} V}{(m+1) r - m R_0 \sin V}.$$

On remarquera aussi que la valeur (11) de R_m permet d'obtenir par la différence des rayons de courbure aux extrémités d'un arc, la rectification de la *développée de la $m^{ième}$ podaire.*

Rectification de la $m^{ième}$ podaire. — En désignant par s_m l'arc de cette $m^{ième}$ podaire, on a

$$\frac{ds_m^2}{d\theta^2} = (r_m^2 + r_m'^2) \frac{d\theta_m^2}{d\theta^2}.$$

D'où, en tenant compte de (5) et de (9),

$$(12) \qquad \frac{ds_m}{d\theta} = \frac{r^m}{(r^2 + r'^2)^{\frac{m+1}{2}}} [r^2 + r'^2 + m(r'^2 - rr'')].$$

(A suivre.)

THÉORIE GÉNÉRALE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET DU PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN DES NOMBRES COMMENSURABLES;

PAR M. P. BARRIEU,
Professeur au lycée de Périgueux.

I.

Nous nous proposons d'établir la théorie du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun sur des raisonnements généraux, qui s'appliquent indistinctement à tous les nombres commensurables, entiers ou fractionnaires.

La méthode suivie nous permettra de mettre en lumière les liens qui unissent le plus grand commun diviseur au plus petit multiple commun et le parallélisme complet qui existe entre les propriétés de ces deux fonctions.

Nous dirons qu'un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, est multiple d'un autre lorsqu'il est égal au produit de cet autre par un nombre entier.

Ainsi $\frac{12}{7}$ est un multiple de $\frac{4}{35}$, parce que l'on a

$$\frac{12}{7} = \frac{4}{35} \times 15.$$

Nous représenterons par les notations

$$D(a, b, c, \ldots, l), \qquad m(a, b, c, \ldots, l)$$

le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple commun des nombres $a, b, c, \ldots, l$.

Décomposition d'un nombre fractionnaire en facteurs premiers. — On sait que tout nombre entier est un produit de facteurs premiers affectés d'exposants entiers et positifs.

Il en résulte immédiatement que tout nombre fractionnaire est un produit de facteurs premiers affectés d'exposants entiers, positifs ou négatifs. Ainsi

$$\frac{28}{45} = \frac{2^2 \times 7}{3^2 \times 5} = 2^2 \times 3^{-2} \times 5^{-1} \times 7.$$

Pour qu'un nombre soit entier, il faut et il suffit qu'il soit égal à un produit de facteurs premiers affectés d'exposants entiers et positifs.

CONVENTION FONDAMENTALE.

Tout facteur premier qui n'entre pas dans un nombre sera considéré comme y entrant avec l'exposant zéro.

D'après cette convention, n nombres donnés quelconques, entiers ou fractionnaires, pourront toujours être considérés comme *composés des mêmes facteurs premiers,* de telle façon qu'un facteur premier quelconque p entrera toujours dans ces nombres avec n exposants entiers, *positifs, négatifs ou nuls,* que nous désignerons par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n.$$

Quand nous dirons que ces exposants sont rangés par ordre de grandeur croissante, cela signifiera que chacun d'eux est inférieur ou égal à celui qui le suit, et que l'on a

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \ldots \leqq \alpha_n.$$

Lemme. — *Pour qu'un nombre entier ou fractionnaire* A *soit divisible par un nombre entier ou fractionnaire* B, *il faut et il suffit que chaque facteur pre-*

mier entre dans A *avec un exposant supérieur ou égal à celui qu'il a dans* B.

En effet, soit p un facteur premier quelconque, et soient α et β les exposants entiers, *positifs, négatifs ou nuls,* avec lesquels ce facteur entre respectivement dans A et B.

Le facteur p entrera dans le quotient A : B avec l'exposant entier $\alpha - \beta$. Donc, pour que ce quotient soit un nombre entier, il faut et il suffit que l'exposant $\alpha - \beta$ soit positif ou nul, ou, en d'autres termes, que α soit supérieur ou égal à β. C. Q. F. D.

Théorème I. — Loi de formation. — 1° *Pour former le plus grand commun diviseur de n nombres, entiers ou fractionnaires, on fait le produit de tous les facteurs premiers qui entrent dans ces nombres, en affectant chacun de ces facteurs de son plus faible exposant.*

2° *Pour former le plus petit multiple commun de n nombres, entiers ou fractionnaires, on fait le produit de tous les facteurs premiers qui entrent dans ces nombres, en affectant chacun de ces facteurs de son plus fort exposant.*

(*Il demeure entendu que les facteurs premiers qui n'entrent pas dans un nombre doivent y être introduits avec l'exposant zéro.*)

Soient

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad l$$

n nombres donnés, entiers ou fractionnaires.

Soit p un facteur premier *quelconque,* et soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

les exposants positifs, négatifs ou nuls, rangés par *ordre*

de grandeur croissante, avec lesquels le facteur p entre dans les nombres donnés.

Considérons un nombre entier ou fractionnaire X, et désignons par x l'exposant positif, négatif ou nul, avec lequel le facteur p entre dans le nombre X :

1° Pour que le nombre X soit un codiviseur des nombres donnés, il faut et il suffit, d'après le lemme, que l'on ait

$$x \leqq \alpha_1.$$

Le nombre X sera donc le plus grand codiviseur des nombres donnés lorsqu'on aura

$$x = \alpha_1, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° Pour que le nombre X soit un comultiple des nombres donnés, il faut et il suffit, d'après le lemme, que l'on ait

$$x \geqq \alpha_n.$$

Le nombre X sera donc le plus petit comultiple des nombres donnés lorsqu'on aura

$$x = \alpha_n, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Exemple de formation. — Trouver le plus grand commun diviseur des nombres

$$1, \quad 63, \quad \frac{28}{15}.$$

On a

$$1 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0,$$
$$63 = 2^0 \times 3^2 \times 5^0 \times 7,$$
$$\frac{28}{15} = 2^2 \times 3^{-1} \times 5^{-1} \times 7;$$

d'où

$$D = 2^0 \times 3^{-1} \times 5^{-1} \times 7^0 = \frac{1}{15},$$
$$m = 2^2 \times 3^2 \times 5^0 \times 7 = 252.$$

Remarque. — Lorsqu'il entre parmi les nombres donnés un ou plusieurs nombres fractionnaires, il ne serait plus exact de dire que le plus grand commun diviseur se compose des facteurs premiers *communs* affectés de leur plus faible exposant, puisqu'il entre généralement dans sa composition des facteurs premiers *non communs;* tels sont les facteurs 3 et 5 dans l'exemple précédent. C'est ce qui nous a conduit à formuler une loi de formation plus générale que l'ancienne et qui, d'ailleurs, renferme l'ancienne comme cas particulier quand tous les nombres sont entiers.

Corollaire. — On déduit aisément de la loi de formation que le plus grand commun diviseur de n fractions irréductibles est une fraction irréductible qui a pour numérateur le plus grand commun diviseur des numérateurs et pour dénominateur le plus petit multiple commun des dénominateurs.

De même, le plus petit multiple commun de n fractions irréductibles est une fraction irréductible qui a pour numérateur le plus petit multiple commun des numérateurs et pour dénominateur le plus grand commun diviseur des dénominateurs.

Théorème II. — Loi de corrélation. — *Étant données deux séries de nombres, entiers ou fractionnaires,*

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad \ldots,\quad A_n \qquad (1^{re}\text{ série}),$$
$$B_1,\quad B_2,\quad B_3,\quad \ldots,\quad B_n \qquad (2^{e}\text{ série}),$$

si l'on a

$$(1) \qquad A_1 B_1 = A_2 B_2 = A_3 B_3 = \ldots = A_n B_n = C,$$

le nombre C *est égal au produit du plus grand commun diviseur des nombres de l'une des séries par le plus petit multiple commun des nombres de l'autre, et*

l'on a

$$\text{(I)} \qquad D(A_1, A_2, \ldots, A_n)\, m(B_1, B_2, \ldots, B_n) = C,$$

$$\text{(II)} \qquad m(A_1, A_2, \ldots, A_n)\, D(B_1, B_2, \ldots, B_n) = C.$$

En effet, soit p un facteur premier *quelconque,* qui entre dans C avec un exposant *positif, négatif ou nul,* que nous désignerons par γ.

Si nous remarquons que, d'après l'égalité (1), les nombres de la deuxième série sont respectivement égaux à

$$\frac{C}{A_1}, \quad \frac{C}{A_2}, \quad \frac{C}{A_3}, \quad \ldots, \quad \frac{C}{A_n},$$

nous voyons que, si le facteur premier p entre dans les nombres de la première série avec les exposants

$$\alpha, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

rangés *par ordre de grandeur croissante,* ce même facteur p entrera dans les nombres de la deuxième série avec les exposants

$$-\alpha_1 + \gamma, \quad -\alpha_2 + \gamma, \quad -\alpha_3 + \gamma, \quad \ldots, \quad -\alpha_n + \gamma,$$

qui se trouveront naturellement rangés par *ordre de grandeur décroissante.*

D'où il résulte que le facteur p entrera dans

$$D(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$$

avec l'exposant *minimum* α_1, et dans

$$m(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n)$$

avec l'exposant *maximum* $-\alpha_1 + \gamma$.

Il entrera donc dans le produit

$$D(A_1, A_2, \ldots, A_n) . m(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n)$$

avec l'exposant

$$\alpha_1 - \alpha_1 + \gamma = \gamma.$$

c'est-à-dire avec le même exposant que dans C. On a donc

$$D(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n).m(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n) = C. \quad (I)$$

On a de même

$$m(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n).D(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n) = C. \quad (II)$$

C. Q. F. D.

Ce théorème est *fondamental*. Il renferme implicitement toutes les propriétés essentielles du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun, comme nous le verrons tout à l'heure.

Mais nous devons auparavant examiner un cas particulier très intéressant. (*A suivre.*)

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

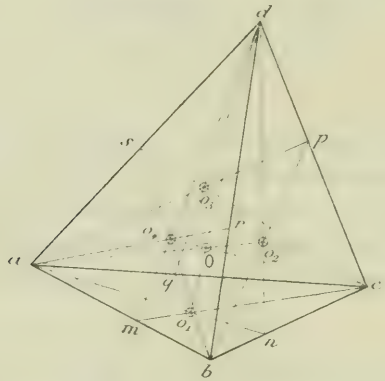
PAR M. F. FARJON.

1. Soient deux points a et b distincts l'un de l'autre, ils déterminent une droite. Nous dirons que tout point de cette droite est un *centre concourant* du réseau (ab). Chacun de ces centres concourants forme sur la droite deux segments dont la différence est égale à la longueur ab.

2. Soient trois points a, b, c, non situés en ligne droite, ils déterminent un plan. Marquons un centre concourant m du réseau (ab) et un centre concourant n du réseau (bc), les deux droites cm et an se coupent en un point o_1, et la droite bo_1 détermine sur ca un centre concourant q du réseau (ca) que nous nommerons *correspondant* des deux centres arbitrairement choisis m

et n. Nous dirons que le point o_1 est un centre concourant du réseau (abc). Inversement tout point o_1 du plan peut être pris pour centre concourant du réseau (abc) et détermine trois centres correspondants des réseaux dérivés (ab), (bc) et (ca). Ces trois centres forment sur les côtés du triangle (abc) six segments qui ont entre eux une relation connue.

3. Soient quatre points a, b, c, d non situés sur un même plan. Ils forment, pris trois à trois, quatre réseaux, et, pris deux à deux, six réseaux dérivés. Prenons trois de ces derniers tels que (ab), (bc), (cd) ne formant pas un même réseau de trois, et marquons arbitrairement sur chacun d'eux un centre concourant m, n, p. Les droites cm et an déterminent un centre concourant o_1 de (abc) et bo_1 un centre concourant q de (ca). Les droites



bp et dn déterminent un centre concourant o_2 de (bcd) et ap et dq, un centre concourant o_3 de (acd) ; nous dirons que o_2 et o_3 sont correspondants de o_1 dans le réseau $(abcd)$.

La droite co_2 détermine un centre r de (bd), et la droite co_3 un centre s de (da). Les deux droites do_1 et

ao_2, situées dans le plan adn se coupent en un point O, par lequel passe également bo_3. Tirons cO, cette droite perce le plan abd en un point o_4, et l'on reconnaît sans peine que les droites dm, ar et bs passent par ce point qui est donc aussi correspondant de o_1, o_2, o_3, dans le réseau ($abcd$).

Nous dirons que le point O est centre concourant du réseau ($abcd$).

Inversement, un point quelconque O de l'espace peut être pris pour centre concourant du réseau ($abcd$). En effet, en joignant ce point à chacun des points a, b, c, d, on détermine sur les plans bcd, cda, abd, cab des centres concourants o_1, o_2, o_3, o_4, et l'on vérifie sans difficulté que ces centres sont correspondants.

Si les quatre points donnés sont dans un même plan, la construction du centre concourant se fera exactement de même; il suffit, pour le démontrer, de considérer la figure plane comme la perspective d'une figure de l'espace; mais la construction inverse est indéterminée : en joignant, par exemple, le centre concourant O au point d, on peut prendre pour centre o_1 du réseau (abc), un point quelconque de cette droite, car on peut toujours supposer que ce point est la perspective d'un point situé dans le plan du triangle dont abc est la perspective.

On sait qu'il existe une relation analytique entre les positions de quatre points donnés. Notre construction en donne une interprétation géométrique des plus simples. De plus, on peut l'étendre à des réseaux d'un nombre quelconque de points.

4. Considérons, en effet, cinq points a, b, c, d, e, ils forment cinq réseaux dérivés de quatre points, dix de trois et dix de deux. Prenons quatre de ces derniers ne faisant point partie d'un même réseau de quatre, par

exemple (ab), (bc), (cd) et (ac) et marquons arbitrairement sur chacun d'eux un centre concourant m, n, p, q. La construction qui précède donnera un centre concourant O_1 du réseau $(abcd)$; joignons eO_1. On obtiendra ensuite un centre concourant correspondant O_2 du réseau $(deab)$, et si l'on tire cO_2, on reconnaîtra que cette droite coupe eO_1 en un point Ω, puisque cO_2 et eO_1 sont dans le même plan co_1e [o_1 étant le centre concourant du réseau commum (abd)]. On verra de même que les centres correspondants O_3 de $(bcde)$ et O_4 de $(cdea)$ sont respectivement en ligne droite avec le point Ω et les points a et b, et, finalement, que si l'on joint $d\Omega$, cette droite rencontrera en un même point O_5 les droites qui, dans le réseau $(abce)$ joignent chaque point au centre concourant déterminé des trois autres, que ce point O_5 est donc un dernier correspondant de O_1, O_2, O_3, O_4.

Et nous dirons que Ω est un centre concourant du réseau $(abcde)$.

On peut continuer ainsi de proche en proche, et, généralement, on conclura de la construction du centre concourant du réseau de N points à celle du centre d'un réseau de $N + 1$.

5. Revenons au réseau de cinq points. Si, comme dans les cas précédents, on veut suivre une marche inverse, c'est-à-dire prendre comme point de départ un point quelconque de l'espace pris pour centre concourant du réseau et en déduire les centres concourants correspondants des réseaux derivés de quatre, de trois et de deux points, le problème est indéterminé, et l'on peut prendre pour centre concourant du réseau $(abcd)$, par exemple, un point quelconque de la droite $e\Omega$.

Le cas est entièrement analogue à celui de quatre

points pris dans un même plan. Quatre points suffisent en effet, pour déterminer un espace à trois dimensions, et le problème ne sera déterminé que si les cinq points sont pris dans l'hyperespace à quatre dimensions, car il est évident que, dans l'hyperespace, une droite ne peut rencontrer un espace à trois dimensions qu'en un seul point, sans quoi elle serait tout entière dans celui-ci. Donc, dans ce cas, la droite $e\Omega$ rencontrera l'espace déterminé par les points a, b, c, d en un point qui sera le centre concourant de leur réseau, et le reste de la construction s'ensuivra.

On raisonnera de même pour un nombre quelconque de points, et, d'une manière générale, la construction inverse, permettant de remonter du centre concourant d'un réseau de N points aux correspondants dérivés de $n-1$, $n-2, \ldots, 3, 2$ points, ne sera déterminée que si les N points donnés sont pris dans un espace à $N-1$ dimensions.

6. Ces considérations, d'une simplicité tout élémentaire, nous paraissent donner une notion assez nette des hyperespaces. Notre esprit éprouve tout d'abord quelque difficulté à concevoir ces espaces, par la raison bien simple que nous sommes nous-mêmes des êtres à trois dimensions et que, par hérédité comme par éducation, nos sens et notre cerveau ne se représentent *a priori* l'espace autrement qu'à trois dimensions. L'espace à deux dimensions est déjà une conception tout idéale, qui exige un effort de notre part, mais lorsqu'il s'agit d'aller au delà de trois dimensions, la difficulté est bien plus grande encore, d'autant plus que les moyens de représenter graphiquement les figures nous font défaut. Il faudrait, pour les figures à quatre dimensions, qu'un nouveau Monge imaginât une géométrie descriptive où

les plans de projection fussent remplacés par des espaces à trois dimensions. Remarquons, en passant, que ceux-ci doivent se couper suivant des plans, sans quoi ils coïncideraient.

Il arrive parfois que les propriétés d'une figure à N dimensions ne peuvent s'établir avec toute leur clarté géométrique que par la considération de figures à plus de N dimensions. Habituellement, on esquive la difficulté par l'emploi des imaginaires, mais c'est là un procédé qui garde quelque chose d'artificiel et ne nous semble pas satisfaire entièrement l'esprit. On sait de quelle façon, à la fois simple et ingénieuse, Chasles a interprété par une figure à trois dimensions les propriétés du cercle imaginaire : nous-même avons indiqué l'application de cette théorie à l'extension de quelques propositions de Géométrie plane (¹). Nous en citerons ici un autre exemple qui nous semble plus concluant encore.

7. Les imaginaires s'introduisent en Géométrie plane par la recherche de l'intersection d'une droite et d'un cercle, ou plus généralement de deux cercles et l'on donne le nom d'*axe radical* à la droite, toujours réelle, qui joint les deux points d'intersection, réels ou imaginaires conjugués, des deux cercles.

Or, si l'on considère les deux cercles résultant de la section d'une même sphère par deux plans, l'intersection de ces plans jouit, par rapport aux deux cercles, des propriétés de l'axe radical, et inversement, si l'on considère deux cercles situés dans un même plan comme situés dans des plans distincts, momentanément confondus, l'axe radical est la charnière autour de laquelle

(¹) *Nouvelles Annales*, année 1888; p. 288.

on peut faire tourner l'un de ces plans d'un angle quelconque, sans que les deux cercles cessent d'être situés sur une même sphère.

Il en est de même de deux coniques dont les plans coïncident; leurs cordes communes sont les droites autour desquelles on peut faire tourner le plan de l'une d'elles sans qu'elles cessent d'être situées toutes deux sur un cône du second degré.

Cette façon de raisonner dispense de recourir aux soi-disant points d'intersection imaginaires.

Élevons maintenant les dimensions de nos figures d'un degré. On définit le plan radical de deux sphères le plan de l'intersection réelle ou imaginaire de ces sphères. Rien n'empêche de concevoir l'existence dans l'hyperespace d'une sphère à quatre dimensions que l'on définira une figure dont tous les points sont à égale distance d'un point nommé *centre*. L'intersection de cette *hypersphère* par un espace à trois dimensions donne nécessairement une sphère ordinaire. Un second espace à trois dimensions donnera une seconde sphère, et le plan d'intersection de ces deux espaces jouira des propriétés du plan radical des deux sphères. Inversement, si l'on considère deux sphères situées dans le même espace, comme situées dans deux espaces distincts momentanément confondus, le plan radical est, nous ne dirons plus la charnière, mais l'*appui* autour duquel on peut faire tourner l'un des espaces d'un angle quelconque, sans que les deux sphères cessent d'être situées sur une même hypersphère.

On peut continuer à raisonner de la sorte et arriver à la notion d'un espace à N dimensions, radical de deux sphères à N — 1 dimensions.

8. Il nous paraît donc acquis que le domaine de la

Géométrie pure s'étend bien au delà des limites que notre imperfection physique lui fait assigner au premier abord. Et cela admis, l'esprit se rend compte de l'existence possible de mondes et de vies infiniment supérieurs aux nôtres. Quel champ ouvert à l'esthétique, par exemple, et imagine-t-on ce que serait une *hyperstatuaire* à quatre dimensions, ou plus encore !

On est aussi conduit dans cette voie à une notion nouvelle de l'infini ; nous ne connaissons effectivement que l'infini de la droite, du plan, ou de l'espace à trois dimensions. Mais envisageons l'espace à un nombre de dimensions de plus en plus grand, et nous nous élèverons à l'infini de l'espace à un nombre infini de dimensions. Nous bornerons là ces réflexions qui s'écartent du modeste sujet que nous avons voulu aborder.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES GAUCHES;

Par M. André CAZAMIAN.

Un certain nombre de théorèmes relatifs aux cubiques unicursales conduisent très facilement à des propositions correspondantes concernant les cubiques gauches, si l'on fait usage de cette remarque que la projection conique d'une cubique gauche sur un plan est une cubique unicursale. Par exemple, M désignant le point de vue, aux trois tangentes inflexionnelles de la cubique plane correspondent les trois plans osculateurs menés par M à la cubique gauche, et de ce que les trois points d'inflexion sont en ligne droite, on déduit que les trois points de contact des plans osculateurs sont dans un même plan avec le point M. Cette propriété, due à

Chasles, est très connue. La suivante l'est peut-être moins. De ce que le pôle de la droite des inflexions d'une cubique unicursale par rapport au triangle formé par les trois tangentes inflexionnelles est le point double de la cubique, on déduit ce théorème :

La sécante double issue d'un point M *de l'espace à une cubique gauche est la polaire du plan défini par les trois points de contact des plans osculateurs menés par* M *à la cubique, relativement au trièdre formé par ces trois plans osculateurs* (¹).

Mais nous nous proposons surtout de transformer des propositions relatives aux points conjugués sur les cubiques unicursales, propositions établies par M. Astor (*Nouvelles Annales*, juillet 1892) et par nous-même (résultats démontrés d'abord pour la strophoïde et étendus à toutes les cubiques unicursales dans notre Note : *Sur les cubiques unicursales*).

Considérons une cubique gauche et un point M de l'espace. La perspective de la cubique sur un plan P en prenant le point M pour point de vue est une cubique unicursale. A deux points conjugués de la cubique plane, c'est-à-dire à deux points tels que les droites les joignant au point double forment un faisceau harmonique avec les tangentes en ce point, correspondent deux points de la cubique gauche tels que les plans passant par la sécante double issue de M et chacun d'eux forment un faisceau harmonique avec les plans définis par la sécante double et les tangentes à la cubique gauche aux points où elle est rencontrée par cette sé-

(¹) La définition de la polaire d'un plan passant par le sommet d'un trièdre, relativement à ce trièdre, étant la même que celle de la polaire d'un plan passant par le sommet d'un cône, relativement à ce cône

cante double. Nous appellerons ces points : *points conjugués relativement au point de l'espace* M. Cela posé, on a les propositions suivantes :

L'enveloppe des droites joignant deux points conjugués d'une cubique unicursale est une conique touchant les tangentes au point double.	Étant donnés une cubique gauche et un point M de l'espace, A et B désignant deux points conjugués quelconques de la cubique (relativement au point M), l'enveloppe des plans MAB est un cône du second ordre touchant les plans définis par la sécante double issue de M et les tangentes à la cubique aux points où elle rencontre cette sécante.
Deux points conjugués d'une cubique unicursale ont le même tangentiel.	Les plans passant par un point M de l'espace, et touchant une cubique gauche en deux points conjugués relativement à M, ont le même tangentiel [1].
Réciproquement, si par un point d'une cubique unicursale on lui mène les deux tangentes, les points de contact sont conjugués.	Réciproquement, si par un point d'une cubique gauche et le point M on mène à la cubique les deux plans tangents, les points de contact sont conjugués relativement à M.
Le collinéaire de deux points conjugués d'une cubique unicursale est conjugué de leur tangentiel.	Le plan défini par un point M de l'espace et deux points d'une cubique gauche conjugués relativement à M rencontre la cubique en un troisième point qui est le con-

[1] Une cubique gauche et un point M de l'espace étant donnés, on peut appeler *tangentiel* d'un point A de la cubique le point où le plan défini par M et la tangente à la cubique au point A rencontre cette dernière.

	jugué du tangentiel commun des deux premiers.
Si l'on joint un point fixe d'une cubique unicursale à tous les couples de points conjugués, on forme un faisceau involutif dont un des rayons doubles est la droite joignant le point M au point double.	M étant un point de l'espace, A un point fixe d'une cubique gauche, les plans passant par la droite MA et par tous les couples de points conjugués forment un faisceau involutif dont l'un des plans doubles est le plan défini par MA et la sécante double issue de M.
Étant donnés sur une cubique unicursale deux couples quelconques de points conjugués (AB), (A′B′), les droites AA′, BB′ se coupent en I sur la cubique, les droites AB′, BA′ se coupent en I′ sur la cubique, et les points I et I′ sont conjugués.	Étant donnés sur une cubique gauche deux couples (AB), (A′B′) de points conjugués relativement à un point M de l'espace, les plans MAA′, MBB′ se coupent en I sur la cubique, les plans MAB′, MBA′ se coupent également en I′ sur la cubique, et les points I et I′ sont conjugués relativement à M.

SUR LE CENTRE DE COURBURE DES PODAIRES;

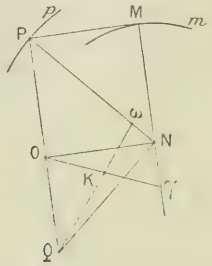
EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. MAURICE D'OCAGNE.

En répondant à la question 295 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, je me suis trouvé amené à donner une variante de l'énoncé de certain théorème que j'avais fait connaître en 1890 dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, pour en déduire la construction indiquée, en 1891, dans les *Nouvelles Annales* par M. Husquin de Rhéville pour le centre de courbure des conchoïdes.

Ce théorème général, susceptible de nombre d'autres

applications, fournit, en particulier, une construction très simple du centre de courbure des podaires, qui peut s'énoncer ainsi :

Soit p la podaire de la courbe m par rapport au point O; abaissant du point O, sur la normale MN en M à la



courbe m, la perpendiculaire ON, nous avons en PN la normale en P à la podaire p.

Cela posé, si nous élevons en N à PN la perpendiculaire NQ qui coupe OP en Q, *le centre de courbure* ω *de la podaire* p *est sur la droite qui joint le point* Q *au milieu* K *de la droite unissant le point* O *au centre de courbure* γ *de la courbe* m.

Vous pourriez proposer aux lecteurs des *Nouvelles Annales* de chercher une démonstration directe de ce théorème.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1889;

PAR M. G. LEINEKUGEL.

On considère les paraboles (P) *qui passent par un point fixe* O *du plan et qui admettent comme directrice une droite* Δ *fixe :*

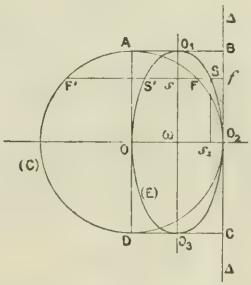
1° *Lieu des foyers et des sommets.*

2° *Par un point* M *du plan passent deux de ces paraboles; quelle est la région du plan où doit se trouver ce point pour que ces deux paraboles soient réelles et distinctes, confondues ou imaginaires.*

3° *Lieu* S *du point* M *pour lequel les paraboles qui y passent se coupent à angle droit à l'origine* O. *Quand le point* M *se trouve sur le lieu* S, *la droite qui joint les deux foyers des paraboles correspondantes passe par un point fixe.*

I. Le lieu des foyers de ces paraboles (P) est évidemment le cercle (C) de centre O et tangent à Δ. Quant au lieu des sommets, il se déduit du lieu des foyers en prenant sur une parallèle FF′ à la perpendiculaire à la directrice menée de O les milieux S, S′ des segments F f, F′ f. Ce lieu est par suite une conique, puisqu'il n'y a que deux points du lieu sur FF′.

Fig. 1.



On peut d'ailleurs le montrer de cette manière : on a sur la *fig.* 1

$$\overline{O_2 f}^2 = fF \cdot fF';$$

or

$$fF = R - 2Ss, \qquad fF' = R + 2Ss;$$

d'où

$$\overline{4Ss}^2 + \overline{Ss_1}^2 = R^2,$$

car

$$O_2 f = S s_1,$$

qui représente l'ellipse (E) inscrite dans ABCD.

Cette ellipse (E) est d'ailleurs la projection sur le plan de la figure de l'intersection du cylindre de base (C) dont les génératrices de front sont inclinées sur le plan du tableau de 45°, avec le plan de section droite passant par la ligne de terre Δ.

II. Pour construire les deux paraboles passant par O, M et admettant Δ pour directrice, nous décrivons le cercle (M) tangent à Δ et de centre M; les deux points communs à (O), (M) sont les deux foyers des deux paraboles cherchées.

Ces deux paraboles seront réelles et distinctes, imaginaires ou confondues, suivant que ces deux cercles auront deux points réels et distincts, imaginaires ou confondus.

Si nous cherchons le lieu des centres des cercles (M) tangents à (O) et à Δ, nous aurons évidemment la ligne séparant les portions du plan pour lesquelles les deux paraboles (P) correspondantes sont distinctes et réelles de celles où elles sont imaginaires.

Si nous considérons la droite Δ′ parallèle à Δ et distante de celle-ci de la longueur R, rayon du cercle (C), on voit que l'on a

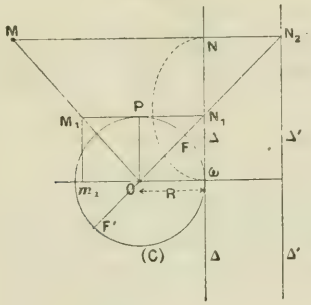
$$MO = MN,$$

pour un point M du lieu, N étant le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Δ′. Le lieu de M est donc la parabole (Q) de foyer O et de directrice Δ′. Pour les points du plan de cette parabole (Q) contenant l'axe, deux paraboles (P) distinctes et réelles ; pour les points sur la parabole (Q), deux paraboles confondues, et enfin dans l'autre région deux paraboles imaginaires.

III. Il résulte de la propriété connue de la tangente à la parabole que, si les tangentes en O sont rectangulaires, les deux foyers F, F′ des paraboles correspondantes sont les extrémités d'un diamètre de (O).

Le lieu des points M pour lesquels les deux paraboles (P) qui passent en O se coupent à angle droit,

Fig. 2.



s'obtiendra donc en cherchant le lieu des centres des cercles tangents à Δ et qui rencontrent O en deux points extrémités d'un même diamètre.

Il suffit, pour construire un point du lieu, de mener par O une droite FF′N, de prendre $N_1\omega = N_1N$ et d'élever en N_1 et en O des perpendiculaires à Δ et à FF′; leur point d'intersection M est un point du lieu. On remarque que (*fig.* 2)

$$OM = 2OM_1$$

(M_1 est le point de rencontre de OM avec la perpendiculaire élevée en N_1 à Δ). Or M_1 décrit une parabole, puisque, dans le triangle M_1ON_1, on a

$$\overline{OP}^2 = \overline{M_1m_1}^2 = 2M_1P\left(\frac{PN_1}{2}\right) = 2\left(\frac{R}{2}\right)Om_1;$$

d'où l'on déduit que M décrit une parabole S, homo-

thétique à la précédente S_1, de sommet O et de directrice Δ'.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1895).

PROGRAMME DES QUESTIONS D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE D'OU SERA TIRÉ LE SUJET D'UNE DES COMPOSITIONS ÉCRITES.

Analyse.

Notions générales sur les intégrales abéliennes relatives à une question algébrique de degré m représentant une courbe C_m qui n'a d'autres points singuliers que des points doubles ou des points de rebroussement de première espèce. Genre de la courbe. Nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes. Intégrales de deuxième et de troisième espèce. Périodes cycliques, périodes polaires.

Théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce, pour les intégrales de deuxième espèce avec un pôle simple, pour les intégrales de troisième espèce.

Application de ce théorème à la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que mq points de la courbe donnée C_m soient situés sur une courbe d'ordre q.

On étudiera plus généralement ces conditions et leurs conséquences géométriques dans les deux cas suivants :

1° La courbe C_m est unicursale. [Consulter le Mémoire de Clebsch *Sur les courbes planes dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles d'un paramètre* (*Journal de Crelle,* t. 64, p. 43; traduction française de M. Durand, chez Hermann, éditeur, rue de la Sorbonne, Paris);

2° La courbe C_m est une courbe du troisième ordre ou une courbe du quatrième ordre du genre *un*.

Nota. — On pourra se borner aux propriétés générales des intégrales abéliennes indispensables aux applications géométriques indiquées.

Ainsi on pourra laisser de côté ce qui concerne les intégrales normales, les périodes normales.

On pourra admettre que le problème d'*inversion* de Jacobi, dans le cas le plus général, définit des fonctions *uniformes*.

Mécanique.

Dynamique du corps solide. Frottement de glissement.

SUJETS DE LEÇONS.

Mathématiques élémentaires.

1. Supposant connus les principes de la théorie des nombres premiers, établir la formule qui fait connaître combien il y a de nombres inférieurs à un nombre donné et premiers avec lui. Théorème de Fermat. Généralisation de ce théorème. Théorème de Wilson.

2. Racine carrée. Racine carrée à moins d'une unité; à moins de $\frac{1}{n}$. (Indiquer quelques méthodes abrégées.)

3. Polygones réguliers, convexes et concaves.

4. Calcul de π.

5. Transformation par rayons vecteurs réciproques. Applications.

6. Figures symétriques dans l'espace.

7. Figures homothétiques dans l'espace. Centre d'homothétie. Axe d'homothétie. Plan d'homothétie. Application à un système de quatre sphères.

8. Sphères tangentes à quatre plans.

9. Pôle et polaire par rapport à un cercle tracé sur une sphère. Axe radical de deux cercles, centre radical de trois cercles tracés sur une sphère. Applications.

10. Démontrer que toute conique peut être considérée comme le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques. Réciproque. Insister sur l'application de ce mode de génération à la démonstration de quelques propriétés des coniques. (Ouvrages à consulter : Chasles, *Traité des Coniques;* Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie.*)

11. Involution sur une droite. Faisceaux en involution. Involution sur une conique. Applications.

12. Propriétés générales des polyèdres. Théorème d'Euler. Applications.

13. Décomposition du trinome $x^4 + px^2 + q$ en un produit de facteurs réels du second degré; application à la résolution de l'équation bicarrée. (On ne supposera pas que l'équation bicarrée ait été résolue par une autre méthode.)

14. Résoudre et discuter : 1° l'équation $P + \sqrt{Q} = 0$, où P est un polynome du premier degré et Q un polynome du second degré; 2° l'équation $\sqrt{P} + \sqrt{Q} = a$, où P et Q sont des polynomes du premier degré et a une constante. Exemples tirés de la Géométrie.

15. Théorèmes des projections. Établir les formules relatives à l'addition des arcs.

16. Vitesse. Étude de la vitesse dans quelques mouvements. Représentations graphiques.

17. Composition des mouvements. Composition des vitesses. Composition de deux mouvements rectilignes et uniformément variés.

18. Théorie des couples. Réduction à une force et à un couple d'un système de forces appliquées à un corps solide. Conditions d'équilibre.

19. Équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné dépoli, en supposant le corps soumis à l'action d'une force passant par son centre de gravité.

20. Balances. Balance ordinaire, balance romaine, balance de Roberval.

21. Systèmes articulés. Appareils de Peaucellier et de Hart. Parallélogramme de Watt.

22. Principes de la théorie des engrenages cylindriques. Exemples simples.

23. Énoncé du principe général des forces vives. Application aux machines.

24. Définition et détermination de la latitude et de la longitude d'un lieu soit sur terre, soit sur mer.

25. Cartes géographiques.

26. Principes des projections cotées. Résolution de quelques problèmes relatifs à la ligne droite et au plan.

27. Première leçon de perspective.

Mathématiques spéciales.

1. Première leçon sur les déterminants.

2. Résolution d'un système de n équations du premier degré à p inconnues.

3. Fractions continues illimitées; fractions continues périodiques; développement des irrationnelles du second degré.

4. Première leçon sur les séries.

5. Définition et étude de la fonction a^x pour une valeur positive de a.

6. Série de Taylor. Application au développement de arc tang$x$. Calcul de π.

7. Application de la théorie des dérivées à l'étude des variations d'une fonction d'une seule variable. Exemples.

8. Définition de l'intégrale définie. Exemples.

9. Élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entières et rationnelles.

10. Calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique. Applications.

11. Transformation d'une équation algébrique dans le cas où chaque racine de l'équation cherchée doit être une fonction rationnelle d'une ou de deux racines de l'équation donnée. Exemples.

12. Théorème de Sturm. Applications.

13. Méthode de M. Hermite pour déterminer le nombre des racines réelles d'une équation algébrique qui sont comprises entre deux limites données. (Consulter le *Cours d'Algèbre supérieure* de Serret, t. I, 4e éd., p. 985.)

14. Invariants de la forme cubique. Application à la résolution de l'équation du troisième degré.

15. Résolution algébrique de l'équation du quatrième degré.

16. Équations binomes. Racines primitives. Polygones réguliers.

17. Génération des surfaces.

18. Exposer sur des exemples simples la marche à suivre pour étudier une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points.

19. Asymptotes d'une courbe définie par son équation en coordonnées rectilignes. (Première leçon.)

20. Réduction simultanée de deux formes quadratiques à trois variables x, y, z à des sommes de trois ou d'un nombre moindre de carrés. Triangle conjugué commun à deux coniques. Discussion et exemples.

21. Invariants simultanés de deux formes quadratiques à trois variables. Triangles inscrits ou circonscrits à une première conique et conjugués par rapport à une seconde conique. Triangles inscrits dans une conique et circonscrits à une autre. Propriétés analogues des cônes du second degré. Applications et exemples.

22. Classification des quadriques en coordonnées tangentielles. (*On prendra comme première base de la classification les caractères qui restent invariables par une transformation homographique, caractères qui sont du reste immédiatement fournis par la décomposition en carrés; on complétera ensuite cette classification en ayant égard aux propriétés métriques.*)

23. Enveloppe d'un cercle dont le centre décrit une conique à centre donnée, en restant orthogonal à un cercle fixe. Trouver les modes de génération analogues dont la courbe enveloppe est susceptible. Inversions et symétries (*par rapport à des axes*) qui laissent la courbe invariable.

24. Figures polaires réciproques dans l'espace. Applications.

25. Un plan P coupe une quadrique suivant une conique à centre, former les équations des axes de cette conique et calculer les longueurs de ces axes. (On supposera que la quadrique est rapportée à des axes rectangulaires quelconques.)

26. Intersection de deux quadriques quand cette intersection se décompose.

27. Une surface étant définie par les équations

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

étudier les propriétés infinitésimales du premier et du second ordre de cette surface autour d'un de ses points. Théorème de Meusnier. Lignes asymptotiques. Lignes de courbure.

28. Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où cette intersection a des branches infinies. (Géométrie descriptive.)

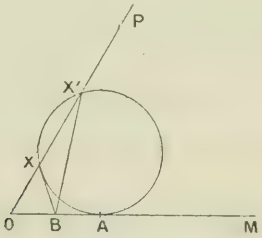
CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE EN 1894.

COMPOSITIONS ÉCRITES.

Arithmétique et Algèbre (3 *heures et demie*).

1° Dérivées. Définition. Théorèmes relatifs aux variations d'une fonction à une variable.

2° On donne deux droites indéfinies OM, OP, faisant un angle de 60°, et, sur OM, deux segments positifs $OA = a$ et $OB = b$. On demande de trouver sur OP un point X, $OX = x$, tel que, si l'on mène la circonférence passant par ce point et



tangente à OM en A, et si l'on joint au point B le point X et le second point X' où la circonférence coupe OP, le produit $XB \times X'B$ soit égal à p fois le produit ab; p est un nombre positif quelconque. On pourra, dans le cours de la discussion, employer comme paramètre auxiliaire la quantité q ci-après

$$q = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

3° Déterminer l'approximation avec laquelle on peut obtenir l'angle B d'un triangle ABC, rectangle en A, connaissant à 0,1 près les valeurs suivantes des côtés b et c :

$$b = 64^{m},6; \qquad c = 157^{m},5.$$

Géométrie cotée (2 *heures et demie*).

Un cône oblique, à base circulaire, a pour base une circonférence C et de rayon égal à 35^{mm}, située dans le plan horizontal de cote zéro. Son sommet S est déterminé par sa projection s, située à une distance $Os = 50^{mm}$ du point O, et par sa cote égale à 109^{mm}; a est la projection horizontale d'un point A de cote égale à 30^{mm}. Sa distance $a\alpha$ au plan vertical Os est égale à 40^{mm}, et la distance $O\alpha$ égale à 60^{mm}.

Mener par le point A un plan qui détermine dans le cône donné une section antiparallèle C'. Construire la projection horizontale de cette section; déterminer ses axes et les points qui se trouvent sur le contour apparent du cône.

Construire les projections des sphères passant :

1° Par la base C et le sommet S;

2° Par la circonférence C' et le sommet S;

3° Par les deux circonférences C et C'.

Les plans des intersections de ces trois sphères prises deux à deux se coupent suivant une même droite : la déterminer.

Calcul trigonométrique (1 *heure*).

Trouver les valeurs de x comprises entre 0° et 180° données par la formule

$$\sin^3(n \times 90^\circ + x) = \frac{\sin(15^\circ 42' 46'')^3 \times \operatorname{tang}(208^\circ 09' 23'')^5}{\cos(277^\circ 00' 32'')^{\frac{1}{2}} \times (0,181725)^{\frac{1}{3}}}.$$

n est un nombre entier quelconque positif ou négatif.

Géométrie et Géométrie analytique (3 *heures et demie*).

I. *Géométrie.* — Propriétés des centres de similitude de deux circonférences.

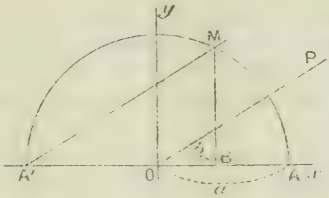
Cas où l'une des circonférences se réduit à une droite.

Application aux deux problèmes de mener une circonférence :

1° Passant par un point donné et tangente à deux circonférences données;

2° Passant par un point donné et tangente à une circonférence donnée et à une droite donnée.

II. *Géométrie analytique.* — Ox et Oy étant deux axes rectangulaires, on décrit de O comme centre une circonférence de rayon a qui coupe l'axe des x en A et A'. Soit B un



point situé sur l'axe des x, OB $= b$, et soit M un point variable sur la circonférence. On considère la parabole circonscrite au triangle MAB et dont l'axe est parallèle à A'M. Démontrer géométriquement que l'axe de cette parabole est la droite OP menée par O parallèlement à A'M.

1° Équation de cette parabole en prenant pour paramètre variable l'angle φ que fait A'M avec l'axe des x; lieu du deuxième point d'intersection avec le rayon OM.

2° Déterminer sur l'axe OP de cette parabole les distances du point O au sommet S et au foyer F. En conclure, en coordonnées polaires, le lieu du sommet et le lieu du foyer.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1894.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Mathématiques.

On donne un triangle ABC dont les côtés ont respectivement pour équations

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0;$$

une conique S touchant en A et B les côtés CA, CB, de l'angle ACB, et dont l'équation est

$$XY = Z^2.$$

Sur cette conique S on prend le point μ, défini par les équations

$$X = Y = Z,$$

et un point variable M; enfin on désigne par ν le point où la droite $C\mu$ rencontre la corde de contact AB.

Cela posé, on joint le point M à l'un des deux points m de la droite AB, qui ont même polaire par rapport aux deux angles AMB, $\mu M \nu$.

1° Démontrer que, le point M décrivant la conique S, la droite Mm enveloppe une courbe Σ du quatrième ordre et de la troisième classe, dont l'équation en coordonnées tangentielles est

$$u^3 + v^3 = uvw.$$

2° Aux points où une droite D rencontre la courbe Σ, on mène à cette courbe les tangentes T_1, T_2, T_3, T_4, et l'on considère la conique C_1 inscrite dans le pentagone formé par ces quatre tangentes et la droite AB; démontrer que, si l'on assujettit la conique C_1 à passer par un point donné P, la droite D enveloppe une conique C_2.

3° Montrer que la conique C_2 se réduit à deux points f, f' quand le point P est sur une certaine conique C_3; trouver dans ces conditions l'enveloppe Σ' de la droite ff' et le lieu des points f, f'.

Physique.

I. Mesure des températures.

II. En admettant comme démontré : 1° que le coefficient de dilatation cubique est le triple du coefficient de dilatation linéaire; 2° que la dilatation d'une enveloppe est exactement celle qu'elle subirait si elle faisait partie d'une masse solide et continue de la même substance, on pourrait obtenir le coefficient de dilatation absolue du mercure par l'expérience suivante :

Deux tubes de même verre, de 1^m de longueur et de 20^{mm} de diamètre environ, sont placés côte à côte dans une même étuve, qu'on peut porter à diverses températures. L'un est en communication avec un manomètre et constitue une espèce de thermomètre à air. On connaît le volume V du réservoir à 0° et le volume très petit v du tube de jonction jusqu'au

repère α de la petite branche du tube manométrique. Ce tube porte vers ses extrémités deux traits, dont on a mesuré la distance l_0 à zéro. Un appareil micrométrique extérieur permet de relever la variation de distance de ces deux traits aux diverses températures; l'autre tube, dont le volume à 0° est V', est rempli de mercure et constitue un thermomètre à poids.

Une expérience consiste, l'étuve étant à une température T : 1° à relever la variation de distance des deux traits; 2° à mesurer la pression H' indiquée par le manomètre; 3° à peser le mercure sorti de l'appareil.

Application numérique.

$V = V' = 300^{cc}$.

$v = 1^{cc}$.

t température extérieure $= 0°$.

$\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{1}{774}$.

$p = 91^{gr},936$.

$\frac{H'}{H} = 1,5407$.

On prendra $D_0 = 13,596$.

— $\alpha = \frac{1}{273}$.

Chimie.

I. Cyanogène. — Acide cyanhydrique.

II. Deux gaz différents, occupant le même volume dans les mêmes conditions de température et de pression, sont mélangés dans un vase A; la densité du mélange par rapport à l'hydrogène est 7,5. Le vase A est séparé d'un vase B, primitivement vide, par une cloison mince percée d'un très petit trou. Celui-ci ayant été débouché pendant un temps très court, une certaine quantité des deux gaz s'est répandue dans le vase B et y forme un mélange ayant une densité par rapport à l'hydrogène égale à $\sqrt{14}$.

On demande :

1° Quel est le poids de chacun des gaz occupant le même volume qu'un poids d'hydrogène égal à 2?

2° Quels peuvent être ces deux gaz?

3° D'indiquer une expérience permettant de lever toute ambiguïté sur la nature des deux gaz qui forment le mélange primitif.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Mathématiques.

On donne une ellipse E, et, dans le plan de cette ellipse, on prend une droite H perpendiculaire à l'un des axes de l'ellipse. On se propose de faire correspondre à la droite H un cercle que nous désignerons par la notation (H), situé dans le plan de l'ellipse et assujetti aux conditions suivantes : son centre est sur celui des axes de l'ellipse, qui est perpendiculaire à la droite H, et le rapport entre la puissance d'un point M de l'ellipse par rapport au cercle (H) et le carré de la distance du même point M à la droite H est indépendant de la position du point M sur l'ellipse.

1° Déterminer la position du centre du cercle (H) ainsi défini, la grandeur de son rayon, et la valeur du rapport qui est indépendant de la position du point M sur l'ellipse. Donner les conditions de possibilité du problème et, quand ces conditions sont remplies, reconnaître, d'après la position de la droite H, comment le cercle (H) qui lui correspond est situé par rapport à l'ellipse E et par rapport à la droite H. En particulier, indiquer dans quels cas le cercle (H) ou n'a aucun point en dehors de l'ellipse, ou n'a aucun point à l'intérieur de l'ellipse.

2° Soient H et K deux droites perpendiculaires, l'une à l'un des axes de l'ellipse, l'autre à l'autre; soit P le point de concours de ces deux droites, et soient (H) et (K) les cercles qui correspondent à ces deux droites.

Démontrer que la ligne des centres des cercles (H) et (K) passe par le point P.

Trouver le lieu des positions que doit occuper le point P pour que les cercles (H) et (K) soient tangents.

Trouver le lieu des positions que doit occuper le point P pour que l'axe radical des cercles (H) et (K) passe par le point P.

3° Soient H, H' deux droites perpendiculaires *au grand*

axe de l'ellipse; et soient (H), (H) les deux cercles que l'on fait correspondre à ces droites.

Démontrer que, si un point M se déplace sur l'ellipse E, la somme ou la différence des longueurs des tangentes menées du point M aux deux cercles est constante, selon que l'arc d'ellipse parcouru par ce point M est ou n'est pas compris entre les droites H et H'.

Modifier comme il convient l'énoncé de cette propriété, pour le cas où les droites H et H' seraient perpendiculaires *au petit axe* de l'ellipse, au lieu d'être perpendiculaires au grand axe.

PREMIÈRE-SCIENCES (ENSEIGNEMENT MODERNE).

Mathématiques.

Étant données deux droites X, Y, qui se coupent en O, un point A sur X et un point B sur Y,

1° Construire l'arc de parabole tangent à ces droites aux points A, B, et compris entre ces points.

2° Donner la condition géométrique pour que le sommet de la courbe soit sur l'arc AB.

3° Le point C étant le milieu de la corde AB, on représente par c la longueur OC et par u, v les angles AOC, COB; calculer en fonction de ces données le paramètre de la parabole et étudier la variation de cette quantité quand, le point A restant fixe, le point B parcourt la droite illimitée Y; examiner les cas limites.

4° Construire *a priori* (sans faire usage des éléments de la courbe) une tangente à l'arc considéré parallèle à une direction donnée; conditions de possibilité.

RHÉTORIQUE.

Géométrie et Cosmographie.

On donne deux cônes de révolution égaux SAB, S'A'B', placés de façon que les plans des cercles de base AB, A'B', sont parallèles, et que le sommet de chacun des cônes est dans

le plan du cercle de base de l'autre. On coupe ces deux cônes par un plan P parallèle aux plans des deux bases, et situé entre ces plans; ce plan P coupe le premier cône suivant un cercle CD, et le second cône suivant un cercle C'D'.

On désigne par r, l, h le rayon de base, l'arête, la hauteur de chacun des cônes, par x la distance du sommet S au point de rencontre du plan P et de l'arête SA, et par y la distance du sommet S au plan P.

1° Déterminer x de façon que le rapport de la somme des surfaces latérales des deux troncs de cône ABCD, A'B'C'D' à la surface latérale du cône SAB soit égal à un nombre donné λ. — Discuter.

2° Déterminer y de façon que le rapport de la somme des volumes des troncs de cône ABCD, A'B'C'D' au volume du cône SAB soit égal à un nombre donné μ. — Discuter.

3° Au lieu de supposer les surfaces latérales des deux cônes limitées au sommet et au cercle de base de chaque cône, on suppose ces surfaces latérales prolongées indéfiniment dans les deux sens, et on suppose que le plan P, parallèle aux plans des deux bases, au lieu d'être nécessairement compris entre ces deux plans, peut se déplacer dans tout l'espace.

Dans ces conditions nouvelles, indiquer pour chacun des deux problèmes quelles conventions il faut faire sur la valeur de l'inconnue et sur la façon d'entendre l'énoncé, pour que l'équation obtenue, quand on suppose le plan P compris entre les plans des bases des deux cônes, convienne encore quand cette condition n'est pas remplie.

Compléter la discussion de chacun des deux problèmes ainsi généralisés.

SECONDE CLASSIQUE.

Algèbre et Géométrie.

I. On considère le système d'équations simultanées

$$\begin{aligned} 52x - 34y - z + 9a &= 0, \\ 49x - 31y - 3z - b &= 0, \\ 36x - 24y + z + 3a + 2b &= 0, \end{aligned}$$

dans lesquelles a et b désignent des entiers positifs donnés, et x, y, z des inconnues.

Résoudre ces équations, et chercher quelles doivent être les valeurs des entiers positifs a et b, pour que les valeurs des inconnues soient positives, et que, en outre, la valeur de l'inconnue x soit la plus petite possible.

II. On considère un tétraèdre OABC, dont on suppose les arêtes prolongées indéfiniment dans les deux sens, et un plan P parallèle au plan de la face ABC: le plan P coupe les arêtes OA, OB, OC, ou leurs prolongements, respectivement aux points A′, B′, C′. On désigne par α le milieu du côté BC, par β le milieu du côté AC, et par γ le milieu du côté AB.

1° Trouver pour quelle position P_1 du plan P les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sont parallèles.

2° Démontrer que, pour toute position du plan P, différente de la position P_1, les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ se coupent en un même point M.

3° Trouver le lieu géométrique du point M, lorsque le plan P se déplace, en restant toujours parallèle au plan de la face ABC.

SECONDE MODERNE.

Mathématiques.

I. On considère une pyramide régulière à base carrée dans laquelle le rapport de la surface totale à l'aire de la base est 2,56. Calculer l'angle d'une face latérale avec le plan de base, l'angle de deux faces latérales et l'angle de deux arêtes latérales.

Calculer la plus courte distance d'une arête latérale et d'une arête de la base dans le cas particulier où le volume de la pyramide est 543 décalitres.

(On fera usage des tables à cinq décimales.)

II. On donne la projection horizontale $abcde$, $a_1b_1c_1d_1e_1$ d'un prisme pentagonal dont les bases sont ABCDE et $A_1B_1C_1D_1E_1$; on donne de plus les projections verticales des sommets $A_1B_1C_1$.

1° Construire les projections verticales des sommets D, E.

2° Construire le pentagone ABCDE au moyen d'un rabattement sur le plan de front du point A.

3° Construire la projection verticale du prisme en supposant sa hauteur donnée.

4° Donner la ponctuation des deux projections.

TROISIÈME CLASSIQUE.

Arithmétique, Algèbre et Géométrie.

I. Démontrer que si l'on divise par 111 les nombres entiers a et $1000a$, on trouve le même reste.

Déduire de là que les nombres

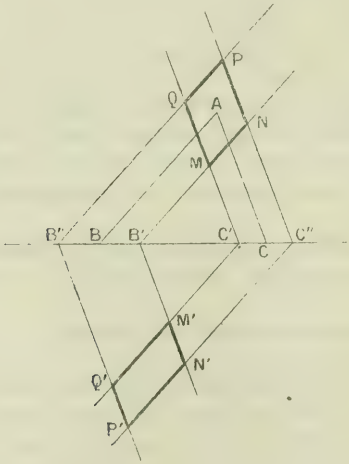
$$A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1, \qquad B = 10^{6n+4} + 10^{3n+2} + 1$$

sont divisibles par 111, et que le nombre

$$C = 10^{6n} + 10^{3n} + 1$$

est égal à un multiple de 111 plus 3. La lettre n désigne un nombre entier quelconque.

II. On donne un triangle ABC, et, sur le côté BC prolongé, on porte de part et d'autre du point B des longueurs



BB′ et BB″ égales à une longueur donnée β, et, de part et d'autre du point C, des longueurs CC′ et CC″ égales à une longueur donnée γ.

En menant par B′ et B″ des parallèles au côté AB, et par C′ et C″ des parallèles au côté AC, on forme un parallélogramme MNPQ; de même, en menant par B′ et B″ des parallèles au côté AC, et, par C′ et C″ des parallèles au côté AB, on forme un deuxième parallélogramme M′N′P′Q′.

1° Trouver les lieux géométriques des sommets du parallélogramme MNPQ, lorsque β et γ varient de manière que le rapport $\frac{\beta}{\gamma}$ reste égal à un nombre donné m.

2° Trouver, dans la même hypothèse, les lieux géométriques des sommets du parallélogramme M′N′P′Q′.

3° Pour quelle valeur de m le parallélogramme MNPQ est-il un losange? Résoudre la même question pour le parallélogramme M′N′P′Q′.

TROISIÈME MODERNE.

Mathématiques.

On donne deux circonférences qui se coupent aux points A et B; par le point B on mène une sécante quelconque, qui rencontre l'une des circonférences en C et l'autre en D; on joint ces points au point A et l'on détermine : 1° le centre M du cercle inscrit; 2° les centres M_1, M_2, M_3 des cercles ex-inscrits au triangle CAD.

Cela posé, on demande :

1° Quel est le lieu géométrique que décrit le centre M, quand la sécante CBD tourne autour du point B?

2° Quels sont les lieux géométriques que décrivent les centres M_1, M_2, M_3?

3° Quel est le lieu géométrique que décrit le point G, point de rencontre des médianes du triangle mobile CAD?

4° On suppose que l'on place la sécante mobile dans la position KBH, pour laquelle l'aire du triangle est maximum. — Dire quelle est cette position, et, en supposant que l'on joigne les points fixes K et H, respectivement aux points mobiles C et D, trouver le lieu géométrique du point où se rencontrent les droites CK et DH.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE EN 1894.

Mathématiques (3 *heures*).

I. On inscrit un cylindre dans une sphère donnée; étudier la variation du volume du solide formé par ce cylindre surmonté, à l'une de ses bases, par l'hémisphère de même rayon que cette base.

II. On donne une circonférence O et la droite TAT′ tangente en A à cette circonférence. On considère une seconde tangente qui rencontre la première en C et qui touche la circonférence en B. La première tangente étant fixe, et la seconde variable, on demande : 1° le lieu géométrique du centre du cercle inscrit au triangle ABC; 2° le lieu du centre du cercle circonscrit; 3° le lieu du point de rencontre des hauteurs; 4° le lieu du point de rencontre du rayon OB avec la perpendiculaire en C à la tangente TAT′.

(Les solutions par la Géométrie étant simples, il leur sera donné la préférence.)

Calcul trigonométrique (1 *heure*).

Calculer, à l'aide de Tables à 5 décimales seulement, les angles et la surface d'un triangle ABC, connaissant les 3 côtés

$$a = 3245, \qquad b = 5879, \qquad c = 5783.$$

Épure (2 *heures et demie*).

Une droite oS de l'espace a pour trace horizontale o; la cote de son point S égale 20^{cm}; sa pente est 1; sa projection os est parallèle au bord inférieur de la feuille, o est à 14^{cm} du bord inférieur, et à 9^{cm} du bord de gauche.

Le point S est le sommet d'un cône ayant pour base dans le plan horizontal le cercle de centre o, de rayon égal à 8^{cm}.

La projection horizontale *os* de la droite *o*S coupe la circonférence *o* en deux points *m* et *n*, le point *n* étant entre *o* et *s*. Par une droite de l'espace, de pente 2, ayant sa trace horizontale au milieu de *om* et coupant la verticale de *o* au-dessus du plan horizontal, passent 2 plans P et P_1 de pente 4. Parallèlement à cette même droite et par les horizontales perpendiculaires à *on* en *o* et en *n*, on mène les deux plans Q et Q_1. Les traces horizontales de ces 4 plans déterminent un trapèze isoscèle qui est la base d'un prisme dont les 4 plans forment les faces latérales.

Représenter la projection du corps opaque commun à ce cône et à ce prisme.

Mener à la projection horizontale des sections du cône par les plans P et P_1 les tangentes parallèles aux côtés du trapèze de base du prisme.

Coter à l'encre rouge les points de contact de ces tangentes, et les autres points remarquables.

Inutile de tracer à l'encre les lignes de construction d'un point quelconque de la section.

SUR LA COMBINAISON DES ÉCARTS;

PAR M. M. D'OCAGNE,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

Le but de la présente Note est de donner une démonstration rigoureuse du théorème fondamental relatif à la combinaison des écarts, *une fois admise la loi de probabilité sous la forme que lui a donnée Gauss.*

I. *Rappel de définitions.* — On admet, d'après Gauss que, pour une série d'observations, les écarts entre le résultat vrai et le résultat constaté obéissent à la loi suivante, où $P(x)$ désigne la probabilité pour que l'écart soit compris entre $-x$ et x,

$$(1) \qquad P(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-h^2x^2}\,dx,$$

h étant une constante à déterminer expérimentalement.

Si l'on pose, d'une manière générale,

$$(2) \qquad \Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2}\, dt,$$

la formule précédente peut s'écrire

$$(3) \qquad P(x) = \Theta(hx).$$

On voit, d'après cela, que, pour une même valeur de la probabilité P, hx sera le même et, par suite, que l'écart x correspondant à cette probabilité P sera d'autant plus petit que h sera plus grand, c'est-à-dire que, suivant l'idée commune, la précision sera d'autant plus grande que h sera plus grand. C'est pourquoi h est pris comme *mesure de la précision*.

On appelle *écart probable* celui η dont la probabilité est $\frac{1}{2}$. Il est donné par la formule

$$(4) \qquad \eta = \frac{0,4769}{h}.$$

L'*écart moyen quadratique* ε est celui dont le carré est la moyenne des carrés des écarts constatés. Il est donné par

$$(5) \qquad \varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Enfin, l'*écart moyen* μ, ou la moyenne des valeurs absolues des écarts, est donné par

$$(6) \qquad \mu = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Des formules (4) et (5) on tire

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = 0,67\ldots = \frac{2}{3}$$

environ, et des formules (5) et (6)

$$\frac{\varepsilon^2}{\mu^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Les formules (4), (5), (6) montrent qu'il suffit de connaître l'une des quantités h, η, ε, μ pour que les trois autres s'en déduisent.

II. Proposons-nous maintenant de rechercher la loi de probabilité des écarts résultants. Prenons d'abord le cas de deux causes d'erreurs, indépendantes l'une de l'autre, auxquelles correspondent respectivement, d'après Gauss, les lois de probabilité

$$p_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x_1^2} dx_1$$

et

$$p_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 x_2^2} dx_2.$$

Pour qu'un écart compris entre x_1 et $x_1 + dx_1$ d'une part, et un écart compris entre x_2 et $x_2 + dx_2$ de l'autre, se produisent simultanément, la probabilité est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2 x_1^2 + h_2^2 x_2^2)} dx_1 \, dx_2$$

et, puisqu'il y a indépendance des causes, ces écarts s'ajoutent et l'on a un écart résultant compris entre $x = x_1 + x_2$ et $x + dx$.

Donc, en vertu du principe des probabilités totales, on aura la probabilité d'un tel écart résultant en faisant la somme de toutes les probabilités élémentaires telles que la précédente, pour lesquelles

$$x \leq x_1 + x_2 < x + dx.$$

Cette somme peut s'écrire

$$p = \frac{h_1 h_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-x_1}^{x+dx-x_1} e^{-(h_1^2 x_1^2 + h_2^2 x_2^2)} dx_1\, dx_2$$

$$= \frac{h_1 h_2}{\pi} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[h_1^2 x_1^2 + h_2^2 (x-x_1)^2]} dx_1.$$

Représentant par J l'intégrale définie du second membre, nous avons

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(h_1^2 + h_2^2) x_1^2 - 2 h_2^2 x_1 x + h_2^2 x^2]} dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\, x_1 - \frac{h_2^2 x}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right)^2 + \frac{h_1^2 h_2^2 x^2}{h_1^2 + h_2^2}\right]} dx_1,$$

ou, en faisant sortir du signe $\int$ la partie constante relativement à la variable d'intégration x_1,

$$J = e^{-\frac{h_1^2 h_2^2 x^2}{h_1^2 + h_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\, x_1 - \frac{h_2^2 x}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right)^2} dx_1.$$

Posons

$$\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\, x_1 - \frac{h_2^2 x}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = u.$$

L'intégrale s'écrit alors

$$J = e^{-\frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} x^2} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= e^{-\frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} x^2} \sqrt{\frac{\pi}{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Dès lors la valeur de p devient

$$p = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{\pi}\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} e^{-\frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} x^2} dx.$$

Si nous posons

$$(7) \qquad h^2 = \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2},$$

elle s'écrit

$$(8) \qquad p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx.$$

Ainsi, nous trouvons pour l'écart résultant une loi de probabilité de la forme de Gauss, et nous voyons que la formule (7) peut s'écrire

$$(7') \qquad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}.$$

Dès lors, si nous avons un nombre quelconque de lois d'écarts, correspondant à des causes indépendantes les unes des autres, nous voyons qu'en composant d'abord ensemble deux d'entre elles, puis la résultante obtenue avec une troisième, et ainsi de suite, nous obtenons finalement encore une loi de la forme (8), où la constante h est donnée par [1]

$$(9) \qquad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \ldots + \frac{1}{h_n^2}.$$

Les formules (4), (5), (6) montrent dès lors que l'on a

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \eta^2 &= \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_n^2, \\ \varepsilon^2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2, \\ \mu^2 &= \mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_n^2, \end{aligned} \right.$$

expressions analytiques qui conduisent à cet énoncé :

Le carré de l'écart $\left\{ \begin{array}{l} \textit{probable} \\ \textit{moyen quadratique} \\ \textit{moyen} \end{array} \right\}$ *résultant est égal à la somme des carrés des écarts* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{probables} \\ \textit{moyens quadratiques} \\ \textit{moyens} \end{array} \right\}$ *composants.*

---

[1] J'ai fait connaître la formule qui, dans le cas des écarts non plus linéaires, mais dans le plan, correspond à celle-ci (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVIII, p. 517).

SUR LE RAYON DE COURBURE DE LA PROJECTION D'UNE COURBE;

PAR M. J. CARON.

1. Étant donnée une droite tangente à une surface du second degré, en un point du contour apparent horizontal dans l'espace; si, par cette droite, on mène une série de plans sécants, toutes les sections en projection horizontale sont osculatrices.

Soit en effet MT la droite donnée, tangente à la surface S au point M du contour apparent horizontal dans l'espace A. Menons par MT deux plans arbitraires P, P_1. Les deux sections se projettent horizontalement suivant deux coniques c, c_1, bitangentes chacune d'elles au contour apparent en projection a.

L'ensemble des deux coniques C, C_1 peut être considéré comme l'intersection de la surface du second degré S avec une autre surface du second degré composée du système des deux plans P, P_1.

Dans ces conditions, cherchons la ligne des points doubles en projection; c'est l'intersection des plans des contours apparents horizontaux, ou des plans diamétraux conjugués des cordes verticales dans les deux surfaces.

Or : 1° le plan du contour apparent horizontal de la surface S passe par M; 2° le plan diamétral conjugué des cordes verticales du système des deux plans PP_1 passe par leur intersection MT; elle passe donc aussi par M.

Ainsi donc, l'une des cordes communes aux deux

courbes c, c_1 passe par m; d'ailleurs une autre corde commune est la tangente mt, puisque c et c_1 sont tangentes au contour apparent en projection a. Finalement les deux courbes c, c_1 sont osculatrices en m.

Les plans P, P_1 étant choisis arbitrairement, la propriété est vraie pour toutes les sections planes menées par la droite MT.

2. Considérons maintenant une courbe gauche quelconque Γ tracée sur la surface S et coupant le contour apparent horizontal dans l'espace A au point M. Soit, de plus, MT la tangente à cette courbe gauche. Le plan osculateur de la courbe gauche Γ passe par MT et coupe la surface S suivant une conique C qui est osculatrice à la courbe Γ, et dont la projection horizontale c est aussi osculatrice à la projection horizontale γ de Γ.

Donc, pour trouver le cercle de courbure au point m de la courbe γ, il suffit de mener par MT un plan absolument arbitraire P qui coupe la surface S suivant une courbe C dont on cherchera le cercle de courbure de la projection c en m.

Il suffira, par exemple, de déterminer trois points de la courbe c, car on sait trouver directement le cercle de courbure en un point m d'une conique définie par ce point m, la tangente mt et trois points n, o, p.

3. La propriété précédente (2) a été démontrée pour une surface du second degré, elle est vraie aussi quand la surface S est de degré supérieur, car on peut remplacer la surface donnée au point M par une autre surface du second degré ayant les mêmes rayons de courbure principaux que la surface S au même point m.

4. Proposons-nous, comme application, de trouver le cercle de courbure en un point quelconque de la pro-

jection horizontale de l'intersection de deux surfaces du second degré.

Soit M, m le point considéré. Par l'intersection des deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, on peut faire passer une infinité de surfaces du second degré dont les équations sont de la forme $f + \lambda\varphi = 0$. Parmi toutes ces surfaces, il en existe une $\psi = 0$ pour laquelle le plan tangent au point M est vertical; ce sera précisément le plan vertical MT.

Le point M appartenant au contour apparent horizontal de la surface ψ, la construction (2) du cercle de courbure sera applicable en ce point.

Il n'est pas nécessaire, d'ailleurs, de construire complètement la surface ψ, il suffit de trouver trois points d'une section par un plan passant par MT.

Nous déterminerons d'abord deux points quelconques de l'intersection des deux surfaces, soit D, E. Puis, par les trois points M, D, E on mène un plan Q; il coupe les deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$ suivant deux coniques dont on connaît déjà trois points communs et dont on sait trouver le quatrième point commun F.

La surface ψ est donc coupée par le plan Q suivant une conique Δ dont on connaît les points M, D, E, F ainsi que la tangente en M, laquelle est l'intersection du plan Q avec le plan vertical MT.

Ceci fait, par MT et par un point quelconque H de l'intersection, on mène un plan P qui coupe les deux surfaces suivant deux courbes tangentes en M, passant par H et par un autre point H_1 que l'on sait trouver. Ce plan rencontre aussi la conique Δ en un point K.

En résumé, M, H, H_1, K sont quatre points d'une conique osculatrice à l'intersection au point M.

Toutes ces constructions se simplifient considérable-

ment dans le cas particulier où les surfaces sont des cônes, ou plus généralement quand on a à sa disposition des plans coupant les deux surfaces suivant des courbes faciles à construire, des sections rectilignes, ou homothétiques par exemple.

Dans le cas de deux cônes, on choisira comme plan Q un plan quelconque passant par M et par le sommet du premier cône, et comme plan P le plan passant par la tangente MT et par le sommet du deuxième cône.

Cette façon de procéder donne lieu à des constructions plus simples que celle qui consisterait à rendre la tangente MT de bout, et à appliquer la construction qui donne les tangentes de rebroussement. De plus, toutes ces constructions peuvent s'effectuer dans une seule projection.

NOTE RELATIVE A LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ;

PAR M. L. BOSSUT,
Capitaine du Génie.

1. Un ellipsoïde rapporté à ses axes ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

on sait que les coordonnées d'un point M de sa surface peuvent être représentées par les expressions

$$x = a\cos\lambda, \qquad y = b\cos\mu, \qquad z = c\cos\nu, \tag{2}$$

les angles λ, μ, ν étant ceux qu'une droite convenable-

ment choisie fait avec les axes de coordonnées, ce qui entraîne la relation connue

$$(3) \qquad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Les quantités λ, μ, ν sont appelées ordinairement *coordonnées angulaires* ou *paramètres circulaires* du point M; elles ont, comme on va le voir, une interprétation mécanique remarquable.

2. On sait, d'autre part, que, si à partir d'un point d'un solide et sur les différentes directions qui en émanent on porte des longueurs proportionnelles aux valeurs de la force élastique suivant chacune de ces directions, le lieu des extrémités des droites ainsi obtenues est un ellipsoïde connu sous le nom d'*ellipsoïde d'élasticité,* et qui a pour équation

$$\frac{x^2}{N_1^2} + \frac{y^2}{N_2^2} + \frac{z^2}{N_3^2} = 1,$$

ses axes étant les axes de coordonnées et les quantités N_1, N_2, N_3 étant les valeurs des tensions principales; ces tensions sont les seules forces élastiques qui soient normales aux éléments-plans sur lesquels elles agissent et qui produisent des déplacements suivant leur propre direction.

Or on sait que les équations qui donnent les valeurs des composantes de la force élastique qui s'exerce sur un plan dont l'axe fait avec trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques des angles λ, μ, ν sont

$$(3) \qquad \begin{cases} X = N'_1 \cos\lambda + T'_3 \cos\mu + T'_2 \cos\nu, \\ Y = T'_3 \cos\lambda + N'_2 \cos\mu + T'_1 \cos\nu, \\ Z = T'_2 \cos\lambda + T'_1 \cos\mu + N'_3 \cos\nu, \end{cases}$$

T'_1, T'_2, T'_3 étant les composantes tangentielles des forces élastiques qui s'exercent sur les trois plans coordonnés

et N'_1, N'_2, N'_3 les composantes normales des mêmes forces.

Si les axes de coordonnées se confondent avec les directions des tensions principales, T'_1, T'_2, T'_3 s'annulent et les équations précédentes deviennent

$$(6) \qquad X = N_1 \cos\lambda, \qquad Y = N_2 \cos\mu, \qquad Z = N_3 \cos\nu.$$

Si l'on compare ces relations aux relations (2), on voit qu'elles deviennent identiques en posant

$$(7) \qquad \begin{cases} X = x, & Y = y, & Z = z, \\ N_1 = a, & N_2 = b, & N_3 = c. \end{cases}$$

Donc :

Les paramètres circulaires d'un point M *d'un ellipsoïde peuvent être regardés comme étant les angles que fait avec les directions des tensions principales l'axe d'un élément-plan sur lequel agit une force élastique dont les composantes suivant les mêmes directions sont précisément les coordonnées cartésiennes du même point.*

De ce rapprochement résulte une série de démonstrations très simples des propriétés connues des forces élastiques autour d'un point; nous en ferons connaître seulement quelques-unes.

3. Au plan

$$(8) \qquad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = 0$$

correspond une force élastique dont l'intensité est

$$(9) \qquad T = \sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\cos^2\mu + c^2\cos^2\nu};$$

mais on sait que l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde parallèle au plan (8) est

$$(10) \qquad \begin{cases} x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu \\ \quad = \sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\cos^2\mu + c^2\cos^2\nu}; \end{cases}$$

donc :

La longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde d'élasticité sur un plan tangent parallèle à un élément-plan passant par son centre est, en valeur absolue, égale à l'intensité de la force élastique qui s'exerce sur cet élément.

4. Imaginons par le centre de l'ellipsoïde trois éléments-plans rectangulaires ; les angles que font leurs axes avec les directions des tensions principales sont donnés par le Tableau suivant :

	Ox.	Oy.	Oz.
OM.....	λ	μ	ν
OM'.....	λ'	μ'	ν'
OM''.....	λ''	μ''	ν''

Cela posé, faisons la somme des carrés des tensions sur ces trois éléments-plans; il vient

$$\begin{aligned} T^2+T'^2_2+T''^2_2 = \quad & a^2(\cos^2\lambda+\cos^2\lambda'+\cos^2\lambda'') \\ & +b^2(\cos^2\mu+\cos^2\mu'+\cos^2\mu'') \\ & +c^2(\cos^2\nu+\cos^2\nu'+\cos^2\nu'')=a^2+b^2+c^2, \end{aligned}$$

la réduction s'opérant parce que les axes ox, oy, oz sont rectangulaires deux à deux; donc :

La somme des carrés des tensions qui s'exercent sur trois éléments-plans quelconques formant un trièdre trirectangle est constante et égale à la somme des carrés des tensions principales.

5. Si λ, μ, ν; λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν'' sont les paramètres circulaires de trois points d'un ellipsoïde, les diamètres qui passent par ces points forment un système de diamètres conjugués si les paramètres satisfont à la condition connue de perpendicularité de deux droites. Mais

cette condition,

$$\cos\lambda \cos\lambda' + \cos\mu \cos\mu' + \cos\nu \cos\nu' = 0,$$

exprime que les axes des plans et, par suite, ces plans sont perpendiculaires deux à deux; donc :

Les directions des forces élastiques qui s'exercent sur trois éléments-plans formant un trièdre trirectangle forment un système de trois diamètres conjugués dans l'ellipsoïde d'élasticité.

6. Appelons p l'intensité de la force élastique qui agit sur un élément-plan dont l'axe fait avec les axes de coordonnées des angles λ, μ, ν et α, β, γ les angles que sa direction fait avec les mêmes axes ; on aura

$$\cos\alpha = \frac{a\cos\lambda}{p}, \qquad \cos\beta = \frac{b\cos\mu}{p}, \qquad \cos\gamma = \frac{c\cos\nu}{p}.$$

Cela posé, exprimons que sa direction est parallèle à celle d'un plan dont l'axe fait avec les axes de coordonnées des angles λ', μ', ν', ce qui revient à écrire qu'elle est normale à l'axe du plan ; on aura

$$a\cos\lambda \cos\lambda' + b\cos\mu \cos\mu' + c\cos\nu \cos\nu' = 0;$$

mais cette relation est symétrique en λ, μ, ν et λ', μ', ν'; donc :

Si la force qui s'exerce sur un élément-plan P *est parallèle à un autre élément* P′, *réciproquement, la force élastique qui s'exerce sur l'élément* P′ *est parallèle à* P.

Les forces élastiques qui satisfont à cette condition sont dites *conjuguées*.

GÉNÉRALISATION ET SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1889;

PAR M. G. LEINEKUGEL.

On considère, dans un plan, une parabole (P) *et une ellipse* (E) *représentées respectivement par les deux équations*

$$(P) \qquad y^2 - 8x = 0, \qquad (E) \qquad y^2 + 4x^2 - 4 = 0,$$

et un point M *de coordonnées* (α, β). *On demande de trouver sur la parabole* (P) *un point* Q *tel que le pôle de la droite* MQ, *par rapport à l'ellipse* (E), *soit situé sur la tangente en* Q *à la parabole. Trouver le nombre de solutions réelles du problème, suivant la position du point* M *dans le plan.*

Solution géométrique. — Considérons deux coniques quelconques (E) et (P) et un point M du plan fixe; il s'agit de trouver un point Q sur l'une des coniques, (P) par exemple, tel que le pôle de MQ par rapport à l'autre conique (E) soit sur la tangente en Q à (P).

Menons par M une droite quelconque MAB, son pôle m par rapport à (E) décrit une droite Δ. Si nous considérons la polaire de m par rapport à (P), elle passera par un point M′ fixe, pôle de Δ par rapport à (P), et rencontrera MAB en Q dont le lieu (Q), quand la sécante pivotera autour de M, contiendra évidemment les points cherchés.

Or, d'après la construction du point Q, il résulte qu'à une droite MAB correspond une et une seule droite M′Q et inversement. Les rayons MQ et M′Q sont donc

homographiques, le lieu de Q est, par suite, une conique passant par les points M, M′ sommets des deux faisceaux. Cette conique passe aussi par les trois sommets R, S, T du triangle autopolaire commun aux deux coniques (E) et (P). En effet, soit S un des sommets, la droite MS a pour pôle, par rapport à (E), le point de rencontre de RT et de Δ, et ce point a pour polaire, par rapport à (P), une droite passant par M′, puis par le pôle de RT, par rapport à (P), c'est-à-dire par S.

Cette conique est bien déterminée puisqu'on en connaît cinq points M, M′, R, S et T. Les quatre points communs à cette conique (Q) et à la conique (P) sont les points répondant à la question. Quelle que soit la position du point M dans le plan, on peut dire qu'il y a toujours deux points réels, car dans le triangle RST, il y a toujours un des sommets intérieurs à (P).

Solution analytique. — Désignons les équations de (P) et de (E) par

$$(\mathrm{P}) \qquad f(x, y, z) = 0,$$
$$(\mathrm{E}) \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

et par X, Y, Z les coordonnées d'un point Q du lieu sur P

$$(1) \qquad f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0;$$

l'équation de la tangente en ce point est

$$x f'_{\mathrm{X}} + y f'_{\mathrm{Y}} + z f'_{\mathrm{Z}} = 0.$$

Elle rencontre la polaire Δ de M par rapport à (E) au point $m(x, y)$ défini par les deux équations suivantes

$$x f'_{\mathrm{X}} + y f'_{\mathrm{Y}} + z f'_{\mathrm{Z}} = 0,$$
$$x \varphi'_{\alpha} + y \varphi'_{\beta} + z \varphi'_{\gamma} = 0.$$

Pour que le point Q satisfasse aux conditions de l'énoncé, il faut que la polaire de ce point m par rapport

à (E) passe en Q, ce qui donne comme condition

$$x\varphi'_X + y\varphi'_Y + z\varphi'_Z = 0.$$

L'élimination de x, y, z donne comme relation à laquelle doivent satisfaire des coordonnées de Q

$$(2) \qquad (Q) \begin{vmatrix} f'_X & f'_Y & f'_Z \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi'_Z \\ \varphi'_\alpha & \varphi'_\beta & \varphi'_\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, où l'on regarde X, Y, Z comme les coordonnées courantes, représente une conique (Q), passant par M, car en substituant à X, Y, Z les coordonnées α, β, γ, le déterminant a deux lignes identiques. Elle passe également par le pôle M′ de Δ par rapport à (P), dont les coordonnées sont définies par les relations

$$\frac{f'_x}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_y}{\varphi'_\beta} = \frac{f'_z}{\varphi'_\gamma}.$$

L'équation de (Q) pouvant s'écrire

$$\begin{vmatrix} f'_X + \lambda\varphi'_X & f'_Y + \lambda\varphi'_Y & f'_Z + \lambda\varphi'_Z \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi'_Z \\ \varphi'_\alpha & \varphi'_\beta & \varphi'_\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

on voit que, les trois sommets du triangle autopolaire commun aux coniques (P), (E) vérifiant les trois équations suivantes :

$$f'_x + \lambda\varphi'_x = 0,$$
$$f'_y - \lambda\varphi'_y = 0,$$
$$f'_z + \lambda\varphi'_z = 0,$$

ces trois points appartiennent à cette conique (Q).

Il y a donc toujours deux points réels d'intersection des coniques (Q) et (P); pour que les deux autres points soient réels, il faut que les trois racines de l'équation

en λ, relative aux coniques (Q) et (P), ait ses trois racines réelles.

Si nous supposons que les équations de (P) et de (E) soient rapportées au triangle autopolaire commun à ces deux coniques

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0,$$
$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0,$$

l'équation de Q devient

$$P = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ A & A' & A'' \\ A\frac{\alpha}{x} & A'\frac{\beta}{y} & A''\frac{\gamma}{z} \end{vmatrix} = 0.$$

ou, en développant,

$$(Q) \quad A\frac{\alpha}{x}(A''a' - a''A') + A'\frac{\beta}{y}(Aa'' - A''a) + A''\frac{\gamma}{z}(A'a - a'A) = 0.$$

L'équation en λ des deux coniques (P) et (Q)

$$f - 2\lambda Q = 0$$

est

$$\begin{aligned} &2\lambda^3\alpha\beta\gamma AA'A''(A''a' - a''A')(Aa'' - A''a)(A'a - a'A) \\ &\quad - \lambda^2[\alpha^2 aA^2(A''a' - a''A')^2 + \beta^2 a'A'^2(Aa'' - A''a)^2 + \gamma^2 a''A''^2(A'a - Aa')^2] \\ &\quad + aa'a'' = 0; \end{aligned}$$

la condition de réalité des racines de cette équation est

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} &27\alpha^2\beta^2\gamma^2 aa'a''A^2A'^2A''^2(A''a' - a''A')^2(Aa'' - A''a)^2(A'a - a'A)^2 \\ &- [\alpha^2 aA^2(A''a' - a''A')^2 + \beta^2 a'A'^2(Aa'' - A''a)^2 + \gamma^2 a''A''^2(A'a - Aa')^2]^3 \leqq 0. \end{aligned} \right.$$

En égalant ce premier membre à zéro et en considérant α, β, γ comme des coordonnées courantes, nous aurons l'équation de la courbe (C) partageant le plan en régions; lorsque le point M sera dans les régions positives, deux points d'intersection de (P) et de (Q) seront réels, dans les autres, tous les quatre seront réels. Cette

courbe du sixième ordre admet six points de rebroussement situés sur les côtés du triangle et sur la conique

$$\alpha^2 a A^2 (A'' a' - a'' A')^2 + \beta^2 a' A'^2 (A a'' - A'' a)^2 + \gamma^2 a'' A''^2 (A' a - A a')^2 = 0,$$

qui admet le triangle de référence comme triangle autopolaire. Les tangentes de rebroussement sont les trois côtés du triangle. Parmi ces six points, quatre seulement sont toujours réels. Cette courbe (C) est encore le lieu des points M pour lesquels les coniques (Q) correspondantes sont tangentes à (P).

Pour appliquer ce qui précède au cas particulier de l'énoncé, nous remarquons que les équations de (P) et de (E) peuvent s'écrire

$$(P) \qquad y^2 - 2i(x+i)^2 - 2i(x-i)^2 = 0,$$

$$(E) \qquad y^2 - 2(x+i)^2 + 2(x-i)^2 = 0,$$

ce qui revient à supposer, dans les équations de (Q) et de (C),

$$\alpha = x + i, \qquad a = 2i, \qquad A = 2,$$
$$\beta = y, \qquad a' = 1, \qquad A' = 1,$$
$$\gamma = x - i, \qquad a'' = -2i, \qquad A'' = 2;$$

l'équation de (Q) devient

$$\beta(x^2 - x)y(1 + \alpha) + y(\alpha - 1) - \beta = 0,$$

celle de (C)

$$27y^2(x^2+1)^2 = (2x^2 + y^2 - 2)^3,$$

symétrique par rapport aux deux axes; il n'y a ici que deux points de rebroussement réels, car deux des côtés du triangle autopolaire commun aux coniques (P) et (E) sont imaginaires. Les termes du sixième degré sont

$$27y^2x^6 = (2x^2 - y^2)^3.$$

Posons

$$\frac{y}{x} = m;$$

l'équation aux coefficients angulaires des directions asymptotiques est alors

$$(m^2 - 1)^3 - 27 m^2 = 0,$$

ou

$$(m^2 - 1)[(m^2 - 1)^2 - 3(m^2 - 1) + 3(m^2 - 1)3^2 - 3^3] = 0,$$

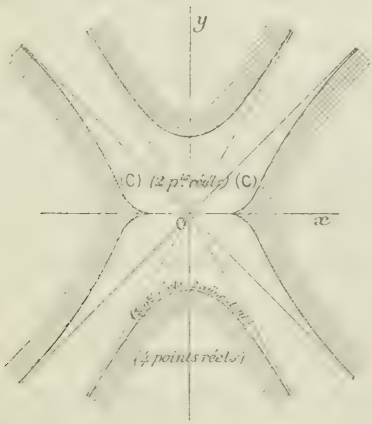
ou

$$m^2 - 1 = 0,$$
$$(m^2 - 1)^2 - 30(m^2 - 1) - 27 = 0,$$

la seconde équation en $(m^2 - 1)$ admettant une racine positive; la courbe (C) admet quatre directions asymptotiques réelles et simples. Comme l'origine est centre de la courbe, les asymptotes passent par ce point. Elle rencontre l'axe des y en deux points seulement, car l'équation

$$27 y^2 = (y^2 - 2)^3$$

en y^2 admet une seule racine positive. La courbe (C) présente donc la forme ci-dessous et les régions portant



des hachures sont celles où doit se trouver le point M pour qu'il y ait quatre points réels répondant à la question.

DES CONDITIONS POUR QUE L'ÉCHELLE D'UNE SUITE RÉCURRENTE SOIT IRRÉDUCTIBLE;

PAR M. ED. MAILLET,
Ingénieur des Ponts et Chaussées [1].

I.

Dans son « Mémoire sur les suites récurrentes », M. M. d'Ocagne énonce le résultat suivant [2] :

L'échelle d'une suite récurrente d'ordre p est ou n'est pas réductible, suivant que les équations $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{p-1}(x) = 0$ ont ou n'ont pas de racine commune.

En reprenant les raisonnements de M. M. d'Ocagne, et les développant un peu, on peut dire aussi :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire pour que l'échelle d'une suite récurrente d'ordre p soit réductible à une d'ordre $p - q$ est que les équations $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{p-1}(x) = 0$ aient q racines communes. Cette condition est suffisante quand les racines de l'équation $\Phi(x) = 0$ sont distinctes.*

En effet, soit une suite récurrente satisfaisant à la loi

$$(a) \qquad Y_n + D_1 Y_{n-1} + \ldots + D_m Y_{n-m} = 0$$

---

[1] Le manuscrit de cet article était déjà déposé à la date du 10 décembre 1894, date à laquelle M. Perrin a fait une Communication à l'Académie des Sciences.

[2] *Journal de l'École Polytechnique;* 1894, p. 151. Pour les définitions des polynomes $\Phi(x)$ et $\Psi_{p-1}(x)$, nous renvoyons à ce Mémoire. $\Phi(x) = 0$ est l'équation génératrice de la suite.

d'équation génératrice

$$(b) \qquad \psi(x) = x^m + D_1 x^{m-1} + \ldots + D_m = 0.$$

On voit facilement que cette suite satisfait à la loi ayant pour équation génératrice

$$(c) \qquad \psi(x)(x + \lambda_1)\ldots(x + \lambda_q) = 0,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont arbitraires.

Une loi d'ordre m est dite irréductible *pour une suite donnée satisfaisant à cette loi quand cette suite ne satisfait pas à une loi d'ordre plus petit.*

Que la loi (a) soit irréductible ou non, la suite satisfait à une infinité de lois d'ordre $m + q (q > 0)$, d'après (c), puisque $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont arbitraires.

Inversement, *si une suite satisfait à deux lois de même ordre k,*

$$(d) \qquad Y_n + B_1 Y_{n-1} + \ldots + B_k Y_{n-k} = 0,$$

$$(e) \qquad Y_n + C_1 Y_{n-1} + \ldots + C_k Y_{n-k} = 0,$$

ces lois sont réductibles pour la suite considérée, car cette suite satisfait à la loi d'ordre $\leqq k - 1$ obtenue en retranchant, membre à membre, (d) et (e).

Enfin, *toute équation génératrice pour la suite considérée est de la forme (c), si la loi (a) à laquelle elle satisfait est irréductible pour cette suite.*

En effet, supposons que la suite satisfasse à la loi (d), avec $k \geqq m$, puisque la loi (a) est irréductible pour la suite.

Si $k = m$, (d) et (a) sont identiques, et l'équation génératrice de (d) est $\psi(x) = 0$, c'est-à-dire de la forme (c).

Si $k > m$, prenons $q = k - m$: on peut choisir la

loi (e) de façon que la suite y satisfasse, que son équation génératrice soit de la forme (c) et que $B_1 \neq C_1$. En retranchant membre à membre (d) et (e), on voit que la suite satisfait à la loi

$$(f) \qquad (B_1 - C_1)Y_{n-1} + \ldots + (B_k - C_k)Y_{n-k} = 0$$

d'ordre $k - 1$. Si à cette loi correspond une équation génératrice de la forme (c), c'est-à-dire ici

$$\psi(x)(x + \lambda'_1)\ldots(x + \lambda'_{q-1}) = 0,$$

on aura

$$\begin{aligned} &x^k + B_1 x^{k-1} + \ldots + B_k \\ &\quad = x^k + C_1 x^{k-1} + \ldots + C_k + [(B_1 - C_1)x^{k-1} + \ldots + (B_k - C_k)] \\ &\quad = \psi(x)[(x + \lambda_1)\ldots(x + \lambda_q) + (B_1 - C_1)(x + \lambda'_1)\ldots(x + \lambda'_{q-1})]. \end{aligned}$$

Le dernier membre, étant le produit de $\psi(x)$ par un polynome de degré k où le coefficient de x^k est l'unité, est de la forme (c).

On voit aussi que, si toute loi d'ordre $k - 1$ a son équation génératrice de la forme (c), il en est de même de toute loi d'ordre k. Or toute loi d'ordre m a son équation génératrice de la forme (c), d'après ce qu'on a vu; il en est donc de même de toute loi d'ordre $m + 1$, par suite de toute loi d'ordre $m + 2$, etc.

Ces indications sommaires suffisent pour établir le résultat annoncé : si une suite donnée satisfait à une loi

$$(1) \qquad Y_n + A_1 Y_{n-1} + \ldots + A_p Y_{n-p} = 0$$

réductible, son équation génératrice $\Phi(x) = 0$ est de la forme (c), où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont déterminés, et l'on peut toujours choisir une loi d'ordre $p - 1$

$$(2) \qquad Y_n + a_1 Y_{n-1} + \ldots + a_{p-1} Y_{n-p+1} = 0,$$

de façon que son équation génératrice soit $\frac{\Phi(x)}{x - \lambda_j} = 0$, λ_j étant une quelconque des quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$.

On en conclut avec les notations et les calculs de M. M. d'Ocagne [1],

$$\Psi_{p-1}(\lambda_j) = Y_{p-1} + Q_1(\lambda_j)Y_{p-2} + \ldots + Q_{p-1}(\lambda_j)Y_0 = 0$$

avec

$$Q_i(x) = x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i.$$

On en tire d'abord le criterium de réductibilité d'une loi pour une suite donnée, indiqué par M. M. d'Ocagne. Mais ce n'est pas tout.

On voit que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont des racines communes à $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{p-1}(x) = 0$, et, par suite, quand $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont distincts, ces deux équations auront q racines communes.

Quand certaines des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ deviennent égales, on pourra choisir une loi analogue à (1), de même ordre, à laquelle satisfait la suite considérée, et pour laquelle les racines $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_q$ de $\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = 0$ sont distinctes, mais diffèrent d'aussi peu que l'on veut de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$, respectivement, puisque, dans (c), on peut choisir q quantités λ arbitrairement. Les quantités $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_q$ sont alors des racines communes aux équations $\Phi'(x) = 0$ et $\Psi'_{p-1}(x) = 0$ correspondant respectivement ici à $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{q-1}(x) = 0$. Ces équations conserveront toujours ces q racines communes quand $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_q$ varient et tendent respectivement vers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ tout en restant distinctes; à la limite, $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{p-1}(x) = 0$ auront q racines communes, et dès lors :

Pour que l'échelle d'une suite récurrente d'ordre p soit réductible à une d'ordre $p - q$ pour cette suite,

---

[1] λ désignant ici ce que M. d'Ocagne appelle y.

il faut que les équations $\Phi(x) = 0$ *et* $\Psi_{p-1}(x) = 0$ *aient q racines communes.*

Quand ces deux équations ont une racine commune λ_j, on voit immédiatement, comme l'a indiqué M. M. d'Ocagne, qu'il existe pour la suite une loi analogue à (2) dont l'équation génératrice est $\frac{\Phi(x)}{x - \lambda_j} = 0$; il en résulte que la loi (1) est réductible pour la suite.

Supposons que les deux équations $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{p-1}(x) = 0$ aient r racines communes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ et que les p racines de $\Phi(x) = 0$ soient distinctes. La suite satisfaisant à une loi d'équation génératrice

$$\frac{\Phi(x)}{x - \mu_j} = 0,$$

d'après ce qu'on a vu antérieurement, $\frac{\Phi(x)}{x - \mu_j}$ est divisible par $\psi(x)$. $\Phi(x)$ est alors divisible par $\psi(x)(x - \mu_j)$, quel que soit j, par suite par

$$\psi(x)(x - \mu_1), \quad \psi(x)(x - \mu_2), \quad \ldots, \quad \psi(x)(x - \mu_r),$$

et par le plus petit commun multiple de ces quantités; puisque toutes les racines de $\Phi(x) = 0$ sont distinctes, ce plus petit commun multiple sera

$$\psi(x)(x - \mu_1)(x - \mu_2)\ldots(x - \mu_r);$$

il en résulte que la loi (1) est réductible pour la suite considérée à l'ordre $p - r$.

Elle ne pourrait d'ailleurs être réductible à un ordre moindre que si les deux équations

$$\Phi(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Psi_{p-1}(x) = 0$$

avaient plus de r racines communes. Donc :

Quand l'équation génératrice d'une suite récurrente d'ordre p, $\Phi(x) = 0$, *n'a que des racines distinctes,*

la condition nécessaire et suffisante pour que la loi correspondante soit réductible à l'ordre $p-q$ est que les deux équations $\Phi(x)=0$ et $\Psi_{p-1}(x)=0$ aient exactement q racines communes.

On obtient ainsi le théorème que nous avons annoncé au début. (*A suivre.*)

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE [suite (¹)];

PAR M. LE CAPITAINE E. BARISIEN.

Aire des anti-podaires successives de la courbe donnée. — Si nous désignons sous le nom d'*anti-podaire* une courbe telle que sa podaire soit la courbe donnée, nous voyons que pour construire le point P_{-1} de la première anti-podaire, il suffit de mener en O une droite faisant avec OM le même angle que OM fait avec OP_1 et d'élever en M une perpendiculaire à OM. Le point de rencontre de ces deux droites donne le point P_{-1}. Si r_{-1} et θ_{-1} sont les coordonnées polaires de ce point, on a

$$\theta-\theta_{-1}=\theta_1-\theta=V-\frac{\pi}{2};$$

et, par suite,

$$\frac{d\theta_{-1}}{d\theta}=1-\frac{dV}{d\theta}=1-\frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2}.$$

On a aussi

$$r_{-1}=\frac{r}{\sin V}=\sqrt{r^2+r'^2}.$$

(¹) *Voir* même Tome, p. 89.

Donc, on a pour la différentielle de l'aire U_{-1} de la première anti-podaire

$$(13)\qquad \frac{dU_{-1}}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2 {}_1 \frac{d\theta_{-1}}{d\theta} = \frac{1}{2}(r^2 + rr'').$$

Généralisons cette formule et cherchons l'aire de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire. Si θ_{-m} et r_{-m} sont les coordonnées du point correspondant de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire, on a

$$\theta_{-m} = \theta - m(\theta_1 - \theta) = \theta - m\left(V - \frac{\pi}{2}\right).$$

D'où

$$\frac{d\theta_{-m}}{d\theta} = 1 - m\frac{dV}{d\theta} = 1 - m\left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right).$$

De plus,

$$r_{-m} = \frac{r_{-(m-1)}}{\sin V} = \frac{r}{\sin^m V} = r\left(\frac{r^2 + r'^2}{r^2}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

On a donc, pour l'aire U_{-m},

$$(14)\qquad \frac{dU_{-m}}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{r^2 + r'^2}{r^2}\right)^m \left[1 - m\left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right)\right].$$

Rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire. — En conduisant le calcul comme pour le rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ podaire, on trouve

$$(15)\qquad R_{-m} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{m+1}{2}}}{r^m}\left[\frac{r^2 + r'^2 - m(r'^2 - rr'')}{r^2 + r'^2 - (m-1)(r'^2 - rr'')}\right].$$

En fonction de l'angle V et de R_0, on a aussi

$$R_{-m} = \frac{r}{\sin^{m+1} V}\left[\frac{(m+1)R_0 \sin V - mr}{mR_0 \sin V - (m-1)r}\right].$$

On en déduit les formules analogues à celles de

M. Husquin de Rhéville

$$R_{-1} = \frac{r}{R_0 \sin^3 V}(2R_0 \sin V - r),$$

$$R_{-2} = \frac{r}{\sin^2 V}\left(\frac{3R_0 \sin V - 2r}{2R_0 \sin V - r}\right),$$

$$R_{-3} = \frac{r}{\sin^4 V}\left(\frac{4R_0 \sin V - 3r}{3R_0 \sin V - 2r}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On a donc aussi

$$R_{-1}R_{-2}R_{-3}\dots R_{-m} = \frac{r^m}{R_0 \sin^{\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{}} V}[(m+1)R_0 \sin V - mr],$$

et, par suite, pour le produit des rayons de courbure des m premières podaires et des m premières anti-podaires,

$$(R_1 R_2 R_3 \dots R_m)(R_{-1} R_{-2} R_{-3} \dots R_{-m})$$
$$= \frac{r^{2m-1} \sin^{m-1} V}{R_0}\left[\frac{(m-1)R_0 \sin V - mr}{(m+1)r - mR_0 \sin V}\right].$$

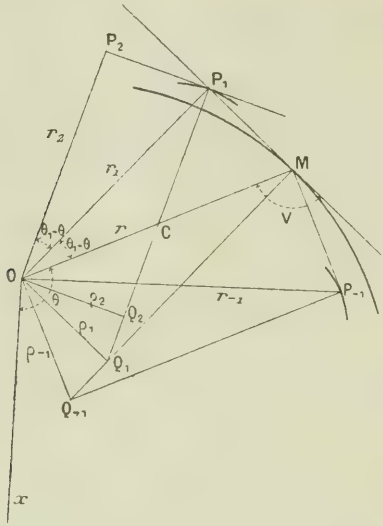
Rectification de la $m^{ième}$ anti-podaire. — On trouve

$$(16) \qquad \frac{ds_m}{d\theta} = \frac{(r^2 - r'^2)^{\frac{m-1}{2}}}{r^m}[r^2 - r'^2 - m(r'^2 - rr'')].$$

Si maintenant nous construisons le quatrième sommet Q_{-1} du rectangle dont les trois autres sommets sont les points O, M et P_{-1}, et si nous abaissons la perpendiculaire OQ_1 sur la diagonale MQ_{-1}, les courbes lieux des points tels que Q_1 et Q_{-1} seront intéressantes à étudier au point de vue de la détermination de leurs aires.

La courbe décrite par Q_1 est la *podaire de la développée de la courbe fondamentale* et la courbe lieu du

point Q_{-1} est la *podaire de la développée de la première anti-podaire.*



Cherchons donc les aires de ces deux genres de courbes.

Aire de la podaire de la développée de la courbe. — Soient ρ_1 et ω_1 les coordonnées du point Q_1, W_1 l'aire de cette courbe. Alors

$$\frac{dW_1}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho_1^2 \frac{d\omega_1}{d\theta}.$$

Or,

$$\omega_1 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}.$$

En différentiant par rapport à θ et tenant compte de (3), il vient

$$\frac{d\omega_1}{d\theta} = \frac{d\theta_1}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

D'autre part

$$\rho_1 = -r\cos V = -\frac{rr'}{\sqrt{r^2 - r'^2}}.$$

Par suite,

$$(17) \qquad \frac{dW_1}{d\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{r^2 r'^2}{(r^2 + r'^2)^2}(r^2 + 2r'^2 - rr'').$$

Aire de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ *podaire.* — On trouve, en appelant ρ_m et ω_m les coordonnées du point Q_m et W_m l'aire de la courbe Q_m,

$$\frac{dW_m}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho_m^2\,\frac{d\omega_m}{d\theta}.$$

Or,

$$\frac{d\omega_m}{d\theta} = \frac{d\theta_m}{d\theta},$$

$$\rho_m = -r\cos V\sin^{m-1}V.$$

Par conséquent,

$$(18) \qquad \frac{dW_m}{d\theta} = \frac{1}{2}r'^2\left(\frac{r^2}{r^2 - r'^2}\right)^m\left[1 + m\left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right)\right].$$

Aire de la podaire de la développée de la $m^{ième}$ *anti-podaire.* — Si W_{-m} est l'aire de cette courbe et si ρ_{-m} et ω_{-m} sont les coordonnées du point Q_{-m}, on a

$$\frac{dW_{-m}}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho_{-m}^2\,\frac{d\omega_{-m}}{d\theta}.$$

Mais

$$\omega_{-m} = \theta_{-(m-1)} - \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\frac{d\omega_{-m}}{d\theta} = \frac{d\theta_{-(m-1)}}{d\theta} = 1 - (m-1)\frac{dV}{d\theta}.$$

De plus

$$\rho_{-m} = -r_{-(m-1)}\cot V = -\frac{r\cos V}{\sin^m V}.$$

Par conséquent

$$(19)\quad \frac{dW_{-m}}{d\theta} = \frac{1}{2} r'^2 \left(\frac{r^2 + r'^2}{r^2}\right)^{m-1} \left[1 - (m-1)\left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right)\right].$$

En faisant $m = 1$ dans cette formule, on a

$$(20)\qquad \frac{dW_{-1}}{d\theta} = \frac{1}{2} r'^2.$$

Il est à remarquer aussi que l'on a

$$\rho_{-1} = -r'.$$

APPLICATIONS.

Nous allons appliquer ces formules à des cas particuliers et en déduire quelques résultats intéressants.

I. — Application a l'ellipse et a ses podaires du centre.

Si l'on prend pour équation de l'ellipse

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta},$$

on trouve

$$r'^2 = \frac{a^2 b^2 c^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3},$$

$$r'^2 - rr'' = \frac{a^2 b^2 c^2 (b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta)}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3},$$

$$r^2 - r'^2 = \frac{a^2 b^2 (a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3},$$

$$r^2 - 2r'^2 - rr'' = \frac{a^4 b^4}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3}.$$

Aire de la première podaire. — On sait que cette podaire a pour équation

$$r_1^2 = a^2 \cos^2\theta_1 + b^2 \sin^2\theta_1$$

et pour aire

$$U_1 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2).$$

Néanmoins recherchons cette aire par le procédé que nous avons indiqué, afin de la généraliser pour la podaire d'ordre m.

L'emploi de la formule (4) donne

$$\frac{dU_1}{d\theta} = \frac{a^4 b^4}{2} \frac{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)}{(a^4 \sin^2\theta - b^4 \cos^2\theta)^2}.$$

Donc, l'aire totale est

$$U_1 = 2a^4 b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 \sin^2\theta - b^2 \cos^2\theta)\, d\theta}{(a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^2}.$$

Afin d'intégrer facilement, remarquons que, si l'on pose pour abréger

$$a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta = A,$$

on a l'identité

$$a^2 \sin^2\theta - b^2 \cos^2\theta = \frac{A - a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Il vient donc

$$U_1 = \frac{2a^4 b^4}{a^2 + b^2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A} - a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A^2} \right).$$

En posant $\operatorname{tang}\theta = u$, on est ramené à des intégrales connues de la forme $\int_0^\infty \frac{du}{(a^4 u^2 + b^4)^p}$.

On a ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A} = \int_0^\infty \frac{du}{a^4 u^2 + b^4} = \frac{\pi}{2a^2 b^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A^2} = \int_0^\infty \frac{du\,(1 + u^2)}{(a^4 u^2 + b^4)^2}$$

$$= \frac{1}{a^4} \int_0^\infty \frac{du}{a^4 u^2 + b^4} - \frac{b^4}{a^4} \int_0^\infty \frac{du}{(a^4 u^2 + b^4)^2} = \frac{\pi(a^4 + b^4)}{4a^6 b^6}.$$

On trouve, par suite, après réduction facile,

$$U_1 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2).$$

Aire de la $m^{ième}$ podaire de l'ellipse. — On trouve par l'application de la formule (7)

$$U_m = 2ma^4b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m-1}}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{m+1}}\,d\theta$$

$$- 2(m-1)a^2b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m-1}}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{m}}\,d\theta.$$

Ces intégrales, comme pour le calcul de U_1, sont toujours ramenables à des intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \frac{du}{(a^4u^2 + b^4)^p}.$$

En posant successivement

$$u = \frac{b^2}{a}\operatorname{tang}\varphi,$$

on a

$$\int_0^\infty \frac{du}{(a^4u^2 + b^4)^p} = \frac{1}{a^2b^{4p-2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-2}\varphi$$

$$= \frac{1}{a^2b^{4p-2}}\,\frac{1.3.5\ldots(2p-3)}{2.4.6\ldots(2p-2)}\,\frac{\pi}{2}.$$

On trouve ainsi pour les quatre premières podaires

(Ellipse).

$$U_0 = \pi ab,$$

$$U_1 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2),$$

$$U_2 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{\pi c^4}{4(a^2 + b^2)},$$

$$U_3 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{7\pi c^4}{16(a^2 + b^2)} + \frac{\pi c^4 a^2 b^2}{4(a^2 + b^2)^3},$$

$$U_4 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{19\pi c^4}{32(a^2 + b^2)} + \frac{\pi c^4 a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)^3} + \frac{\pi c^4 a^4 b^4}{2(a^2 + b^2)^5},$$

. . . . . .

(*A suivre*).

THÉORIE GÉNÉRALE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET DU PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN DES NOMBRES COMMENSURABLES [1];

PAR M. P. BARRIEU,
Professeur au lycée de Périgueux.

CAS PARTICULIER. — *Formules de corrélation.* — Appliquons le théorème II aux deux séries [2] :

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad l,$$

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{l}.$$

Nous aurons

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l) . m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = 1, & \text{(III)} \\ m(a, b, c, \ldots, l) . \mathrm{D}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = 1, & \text{(IV)} \end{array} \right.$$

ce qui donne le théorème suivant :

Le produit du plus grand commun diviseur de n nombres par le plus petit multiple commun de leurs inverses est égal à l'unité.

Nous donnons aux formules (III) et (IV) le nom de *formules de corrélation* parce qu'elles permettent de passer d'une propriété du plus grand commun diviseur à une propriété correspondante du plus petit multiple commun, et réciproquement.

---

(1) *Voir* même Tome, p. 95.

(2) Il demeure entendu, une fois pour toutes, que les lettres $a, b, c, \ldots, l$ désignent des nombres quelconques entiers ou fractionnaires.

Ces deux formules peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{ll} m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l)}, & \text{(III)}' \\ \mathrm{D}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{m(a, b, c, \ldots, l)}, & \text{(IV)}' \end{array}\right.$$

d'où il résulte que :

Le plus petit multiple commun des inverses de n nombres est égal à l'inverse du plus grand commun diviseur de ces nombres, et réciproquement.

Ces formules sont d'un usage fréquent dans les transformations.

Nous allons maintenant tirer du théorème II, par voie de corollaires, toutes les propriétés essentielles du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun.

Corollaire I. — Si l'on multiplie, ou si l'on divise n nombres entiers ou fractionnaires par un même nombre entier ou fractionnaire k, le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple commun de ces nombres sont multipliés ou divisés par k.

En effet, d'après le théorème II, les deux séries

$$\begin{array}{ccccc} ak, & bk, & ck, & \ldots, & lk, \\ \frac{1}{a}, & \frac{1}{b}, & \frac{1}{c}, & \ldots, & \frac{1}{l} \end{array}$$

donnent

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}(ak, bk, \ldots, lk) . m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = k, \\ m(ak, bk, \ldots, lk) . \mathrm{D}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = k, \end{array}\right.$$

d'où, en appliquant les formules de corrélation,

$$\begin{cases} \mathrm{D}(ak, bk, \ldots, lk) . \dfrac{1}{\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l)} = k, \\ m(ak, bk, \ldots, lk) . \dfrac{1}{m(a, b, c, \ldots, l)} = k, \end{cases}$$

d'où enfin

$$\begin{cases} \mathrm{D}(ak, bk, ck, \ldots, lk) = k . \mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l) & \text{(V} \\ m(ak, bk, ck, \ldots, lk) = k . m(a, b, c, \ldots, l) & \text{(VI)} \end{cases}$$

C. Q. F. D.

Corollaire II. — 1° Pour qu'un codiviseur de n nombres soit leur plus grand commun diviseur, il faut et il suffit qu'en divisant chacun de ces nombres par ce codiviseur les quotients obtenus soient premiers entre eux.

2° Pour qu'un comultiple de n nombres soit leur plus petit multiple commun, il faut et il suffit qu'en divisant ce comultiple par chacun de ces nombres, les quotients obtenus soient premiers entre eux.

Soient n nombres entiers ou fractionnaires

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad l,$$

et soient δ et μ un codiviseur et un comultiple de ces nombres.

1° On a identiquement, d'après le corollaire I,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l) = \delta . \mathrm{D}\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}, \frac{c}{\delta}, \ldots, \frac{l}{\delta}\right).$$

Donc pour que δ soit égal à $\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l)$, il faut et il suffit que les nombres *entiers* $\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}, \frac{c}{\delta}, \cdots$ soient premiers entre eux. C. Q. F. D.

2° Appliquons le théorème II aux deux séries

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad l,$$

$$\frac{\mu}{a}, \quad \frac{\mu}{b}, \quad \frac{\mu}{c}, \quad \ldots, \quad \frac{\mu}{l}.$$

Nous aurons

$$(2) \qquad m(a, b, c, \ldots, l).\mathrm{D}\left(\frac{\mu}{a}, \frac{\mu}{b}, \frac{\mu}{c}, \ldots, \frac{\mu}{l}\right) = \mu.$$

Donc, pour que μ soit égal à $m(a, b, c, \ldots, l)$, il faut et il suffit que les nombres *entiers* $\frac{\mu}{a}, \frac{\mu}{b}, \frac{\mu}{c}, \ldots, \frac{\mu}{l}$ soient premiers entre eux. C. Q. F. D.

Remarque. — Les formules (1) et (2) montrent que δ est un diviseur de $\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l)$ et que μ est un multiple de $m(a, b, c, \ldots, l)$. Donc :

Tout codiviseur de plusieurs nombres divise leur plus grand commun diviseur ;

Tout comultiple de plusieurs nombres est un multiple de leur plus petit multiple commun.

Corollaire III. — 1° Le produit de n nombres entiers ou fractionnaires est égal au produit du plus grand commun diviseur de ces nombres par le plus petit multiple commun des produits obtenus en combinant ces nombres $n-1$ à $n-1$.

2° Le produit de n nombres entiers ou fractionnaires est égal au produit du plus petit multiple commun de ces nombres par le plus grand commun diviseur des produits obtenus en combinant ces nombres $n-1$ à $n-1$.

Soient $a, b, c, \ldots, l$ les nombres donnés, et P leur produit.

Le théorème II, appliqué aux deux séries

$$\begin{array}{ccccc} a, & b, & c, & \ldots, & l, \\ \frac{\mathrm{P}}{a}, & \frac{\mathrm{P}}{b}, & \frac{\mathrm{P}}{c}, & \ldots, & \frac{\mathrm{P}}{l}, \end{array}$$

donne

$$m(a, b, c, \ldots, l).\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{P}}{a}, \frac{\mathrm{P}}{b}, \frac{\mathrm{P}}{c}, \ldots, \frac{\mathrm{P}}{l}\right) = \mathrm{P},$$

$$\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l).m\frac{\mathrm{P}}{a}, \frac{\mathrm{P}}{b}, \frac{\mathrm{P}}{c}, \ldots, \frac{\mathrm{P}}{l}\Big) = \mathrm{P},$$

d'où les formules connues

$$\text{(VII)} \qquad m(a, b, c, \ldots, l) = \frac{P}{D\left(\frac{P}{a}, \frac{P}{b}, \frac{P}{c}, \ldots, \frac{P}{l}\right)}.$$

$$\text{(VIII)} \qquad D(a, b, c, \ldots, s) = \frac{P}{m\left(\frac{P}{a}, \frac{P}{b}, \frac{P}{c}, \ldots, \frac{P}{l}\right)}.$$

Corollaire IV. — Le produit de n nombres, entiers ou fractionnaires, est égal au plus grand commun diviseur des produits obtenus en combinant ces nombres r à r, multiplié par le plus petit commun multiple des produits obtenus en les combinant $n - r$ à $n - r$.

Soient $a, b, c, \ldots, l$ les n nombres donnés, et P leur produit.

Désignons par

$$\text{(1)} \qquad \pi, \quad \pi', \quad \pi'', \quad \ldots$$

les divers produits obtenus en combinant r à r les nombres donnés.

Les produits obtenus, en les combinant $n - r$ à $n - r$, seront

$$\text{(2)} \qquad \frac{P}{\pi}, \quad \frac{P}{\pi'}, \quad \frac{P}{\pi''}, \quad \ldots.$$

Si maintenant nous appliquons le théorème II aux séries (1) et (2), nous aurons

$$\text{(IX)} \qquad D(\pi, \pi', \pi'', \ldots).m\left(\frac{P}{\pi}, \frac{P}{\pi'}, \frac{P}{\pi''}, \cdots\right) = P.$$

$$\text{(X)} \qquad m(\pi, \pi', \pi'', \ldots).D\left(\frac{P}{\pi}, \frac{P}{\pi'}, \frac{P}{\pi''}, \cdots\right) = P.$$

C. Q. F. D.

Remarque sur les corollaires. — Dans la démonstra-

tion des corollaires, nous avons établi directement les propriétés du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple. Nous aurions pu, pour les corollaires (I), (III) et (IV), nous contenter de faire la démonstration pour le plus grand commun diviseur et en déduire la propriété correspondante du plus petit commun multiple, au moyen des formules de corrélation.

Reprenons, par exemple, le corollaire I, et supposons démontré directement que *si l'on multiplie, ou si l'on divise, plusieurs nombres par un même facteur, leur plus grand commun diviseur est multiplié, ou divisé, par ce facteur.*

Appliquons ce théorème aux nombres $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \cdots$ et au facteur $\frac{1}{k}$. Nous aurons

$$\frac{1}{k} \mathrm{D}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \cdots\right) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{ak}, \frac{1}{bk}, \frac{1}{ck}, \cdots\right),$$

d'où, en appliquant les formules de corrélation,

$$\frac{1}{k} \frac{1}{m(a, b, c, \ldots)} = \frac{1}{m(ak, bk, ck, \ldots)},$$

d'où

$$k\, m(a, b, c, \ldots) = m(ak, bk, ck, \ldots),$$

formule qui donne la propriété corrélative du plus petit commun multiple.

On suivrait la même marche pour les corollaires (III) et (IV).

Cet emploi des formules de corrélation met bien en évidence les liens qui unissent le plus grand commun diviseur au plus petit commun multiple, et explique le parallélisme complet qui existe entre les propriétés de ces deux fonctions.

Nous rencontrerons plus loin un emploi analogue des mêmes formules.

Théorème III. — Loi de transformation. — *On peut, sans changer le plus grand commun diviseur (ou le plus petit commun multiple) de n nombres, grouper arbitrairement ces nombres, et remplacer ensuite chacun des groupes par le plus grand commun diviseur (ou le plus petit commun multiple) des nombres qui le composent, et réciproquement.*

Un même nombre peut entrer dans plusieurs groupes, et un ou plusieurs nombres peuvent être laissés en dehors des groupes.

Soient n nombres donnés, entiers ou fractionnaires : $a, b, c, \ldots, l$.

Groupons arbitrairement ces nombres et formons le plus grand commun diviseur des nombres de chaque groupe. Ainsi, par exemple, soient :

d_1 le plus grand commun diviseur des nombres a, d, g, i,
d_2 le plus grand commun diviseur des nombres a, b, d, e;
d_3 le plus grand commun diviseur des nombres f, j, k;
et soient c, h, l, les nombres laissés en dehors des groupes; on aura

$$D(a, b, c, \ldots, l) = D(d_1, d_2, d_3, c, h, l).$$

En effet, soit p un facteur premier quelconque, et soit α l'exposant *minimum* de p dans les nombres donnés. Il résulte de la loi de formation que le facteur p se retrouvera avec son exposant *minimum* α dans l'un des plus grands communs diviseurs d_1, d_2, d_3, ou dans l'un des nombres restants c, h, l.

L'exposant *minimum* de p sera donc le même dans

$(a, b, c, \ldots, l)$ et dans (d_1, d_2, d_3, c, h, l). Par conséquent, le facteur p entrera avec le même exposant dans

$$D(a, b, c, \ldots, l)$$

et dans

$$D(d_1, d_2, d_3, c, h, l),$$

et l'on aura

$$\text{(XI)} \qquad D(a, b, c, \ldots, l) = D(d_1, d_2, d_3, c, h, l).$$

C. Q. F. D.

On démontrerait de même que

$$\text{(XII)} \qquad m(a, b, c, \ldots, l) = m(m_1, m_2, m_3, c, h, l).$$

Exemples :

$$\begin{aligned} D(a, b, c, d, e) &= D[D(a, b), c, d, e] \\ &= D[D(a, b), D(a, c), d, e] \\ &= D[D(a, b, c), D(d, e)], \\ m(a, b, c, d) &= m[m(a, b, c), d] \\ &= m\{m[m(a, b), c], d\}. \end{aligned}$$

Corollaire. — Si, dans une série de nombres donnés, il entre en même temps un nombre et des multiples ou des diviseurs de ce nombre, on peut, dans la formation du plus grand commun diviseur, supprimer tous les multiples, et, dans la formation du plus petit commun multiple, supprimer tous les diviseurs.

En effet, soient $a, b, c, \ldots, l$ des nombres donnés entiers ou fractionnaires, et k un nombre *entier;* on a

$$\begin{aligned} D(a, ak, b, c, \ldots) &= D[D(a, ak), b, c, \ldots] \\ &= D[a.D(1, k), b, c, \ldots] \\ &= D(a, b, c, \ldots), \end{aligned}$$

puisque, k étant entier, on a

$$D(1, k) = 1.$$

De même,

$$\begin{aligned} m(a, ak, b, e, \ldots) &= m[m(a, ak), b, c, \ldots] \\ &= m[a, m(1, k), b, c, \ldots] \\ &= m(ak, b, c, \ldots), \end{aligned}$$

puisque, k étant entier, on a

$$m(1, k) = k. \qquad (\textit{A suivre}).$$

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. G. LEINEKUGEL.

Une parabole variable a son foyer au centre d'une conique donnée, deux des tangentes communes à cette conique et à l'une des paraboles se coupent en un point qui décrit une droite fixe; démontrer que les deux autres tangentes communes sont constamment tangentes à un cercle fixe.

Si l'on transforme, en effet, la propriété précédente par polaires réciproques, le centre du cercle par rapport auquel on transforme étant le centre de la conique, on a la propriété suivante :

Un cercle variable passe par le centre d'une conique et l'une de ses sécantes communes avec la conique passe par un point fixe, l'autre sécante commune enveloppe une parabole dont le foyer est à l'origine.

Cette propriété se démontre directement par des considérations simples. Je vais montrer que le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la co-

nique sur la seconde sécante commune est une droite. La propriété sera par suite démontrée.

Il suffit de prouver que, sur toute droite passant par l'origine, il n'y a qu'un point du lieu. Nous remarquons de suite que l'origine, c'est-à-dire le centre de la conique, ne peut évidemment pas faire partie du lieu. Cela posé, menons une droite quelconque OA par le centre, la droite OB également inclinée sur les axes et la droite CD passant par le point fixe P et perpendiculaire à OB. Nous considérons alors le cercle circonscrit au triangle OCD, qui coupera la conique en deux points E, F réels ou imaginaires, la corde qui les joindra EF sera toujours réelle, elle est également inclinée sur les axes que CD et par suite sera perpendiculaire à OA. D'après la construction, on voit qu'à une droite OA correspond une et une seule droite EF; le lieu du point d'intersection de ces droites est par suite une droite. On voit évidemment qu'elle sera perpendiculaire à OP′ qui est également inclinée sur les mêmes axes que OP, car dans ce cas les droites (E′F′, OF′) sont parallèles.

La seconde proposition donne lieu à la suivante, qui est plus générale :

Étant données une droite IJ, *son pôle* O *par rapport à une conique* (E), *on considère toutes les coniques circonscrites au triangle* OIJ (I, J *deux points de la droite fixe*) *et coupant la conique* (E) *en des points tels que l'une des sécantes communes d'un système passe par un point fixe : l'autre sécante commune enveloppe une conique tangente à* IJ.

La propriété corrélative est la suivante :

On considère un triangle dont l'un des sommets a pour polaire par rapport à une conique (E) *fixe le*

côté opposé, et les coniques inscrites dans ce triangle assujetties à ce que deux de leurs tangentes communes avec (E) *se coupent sur une droite fixe : le second ombilic du couple, dont l'un d'eux décrit la droite fixe, décrit une conique.*

BIBLIOGRAPHIE.

LE CALCUL SIMPLIFIÉ PAR LES PROCÉDÉS MÉCANIQUES ET GRAPHIQUES, par M. *Maurice d'Ocagne,* ingénieur des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894. Prix : 2^{fr},75.

Cet intéressant Ouvrage est la reproduction de trois brillantes conférences faites par M. d'Ocagne au Conservatoire national des Arts et Métiers. C'est une œuvre de vulgarisation, mais conçue dans un esprit vraiment scientifique.

Chacun sait combien il est malaisé de rester clair et précis dans l'exposition d'une question de Mathématiques appliquées lorsqu'on s'impose la condition de se priver du secours des symboles algébriques; il y a là une difficulté presque insurmontable dont M. d'Ocagne est cependant parvenu à triompher avec un succès que nous nous plaisons à reconnaître et à proclamer. Le savant ingénieur a su charmer son auditoire sans se départir un moment de la rigueur qui convenait à son sujet; pour s'en convaincre, le lecteur n'a qu'à se rapporter à l'exposé des notions fondamentales relatives à l'anamorphose et aux points isoplèthes; il constatera le soin que met toujours l'auteur à indiquer le point où doit intervenir l'Analyse mathématique et les motifs de cette intervention.

C'est, croyons-nous, dans cet Ouvrage qu'apparaît pour la première fois une classification rationnelle et complète des procédés de simplification du calcul. Le savant auteur range ces procédés en deux catégories : à la première appartiennent ceux dont le but est d'effectuer une ou plusieurs opérations par

un moyen emprunté au graphique ou à la Mécanique ; à la seconde se rattachent ceux qui ont pour but de fournir en bloc et d'enregistrer les résultats d'une même formule pour un grand nombre d'états différents des données.

Les procédés de la première catégorie sont répartis en trois groupes :

Le premier groupe concerne les instruments et les machines arithmétiques effectuant mécaniquement les opérations de l'Arithmétique, les uns (instruments) sans transformation de mouvement, les autres (machines) avec transformation de mouvement.

Le second groupe est constitué par les règles, les cercles, les cylindres et les hélices à calcul, c'est-à-dire par les instruments dits logarithmiques.

Enfin au troisième groupe se rapportent le calcul par le trait, la statique graphique, et les épures de tout genre remplaçant les opérations arithmétiques par des constructions géométriques.

Les procédés de la seconde catégorie sont divisés en deux groupes :

Au premier se rapportent les Tables numériques ou barèmes accompagnés de l'indication de l'emploi du calcul des différences.

Au second appartiennent les Tableaux graphiques ou abaques dont le principe paraît avoir été énoncé avec précision pour la première fois par Terquem dans le *Mémorial de l'Artillerie*, en 1830, et dont la théorie, perfectionnée par Lalanne, puis développée avec un remarquable talent par MM. Lallemant et d'Ocagne, constitue aujourd'hui un véritable corps de doctrine auquel M. d'Ocagne a donné le nom, aujourd'hui accepté, de *Nomographie* (voir *Nouvelles Annales*, 1891).

Puisse cette analyse sommaire inspirer à nos lecteurs le désir d'étudier un livre à la fois attrayant et instructif, et qui renferme, n'oublions pas ce détail important, la première description complète de la machine si curieuse de Tchébychef.

E. R.

SUR DEUX THÉORÈMES CLASSIQUES DE CINÉMATIQUE [1];

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Commençons par le mouvement d'un plan sur un plan. Nous supposons démontrée l'existence du centre instantané de rotation, et nous voulons prouver que le mouvement revient au roulement d'une courbe sur une autre.

Deux remarques doivent être rappelées avant de commencer la démonstration. En premier lieu, si les coordonnées d'un point M sont des fonctions de t, et que M′ désigne la position du point au temps $t + \Delta t$, la distance MM′ sera de l'ordre de Δt pour une valeur arbitraire de t.

Je rappelle en second lieu que, si l'on a un segment de droite AB de longueur variable l, se déplaçant avec le temps, et étant en A′B′ au temps $t + dt$, on a pour la différentielle dl

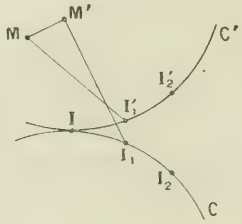
$$dl = -[AA' \cos(A'AB) + BB' \cos(B'BA)],$$

Cela posé, considérons le système Σ au temps t; il occupe une position S, et il y a un certain point I dont la vitesse est nulle. Je marque ce point I sur le plan fixe. Au temps t_1, Σ occupe une autre position S_1; le centre instantané marqué sur le plan fixe est alors I_1. Nous aurons de même I_2 comme position du centre instantané

[1] Je reproduis ici la démonstration des deux théorèmes fondamentaux de la cinématique des systèmes invariables, telle que je la donnai en 1881 dans mon cours de la Faculté et que je la donne maintenant dans mon cours de l'École Centrale.

pour le temps t_2, et nous formons ainsi avec les points $I, I_1, I_2, \ldots$ une courbe C qui est le lieu des centres instantanés sur le plan fixe.

Fig. 1.



Au temps t_1, le système Σ était en S_1. Marquons alors sur S_1 la position I_1 du centre instantané à cet instant, et ramenons Σ de la position S_1 à la position S qu'il occupait au temps t. Le point I_1 vient alors en I'_1; de même en ramenant Σ de S_2 en S, le point I_2 viendra en I'_2, et de cette manière nous construisons une seconde courbe C′ lieu des points $I, I'_1, I'_2, \ldots$, qui est le lieu des centres instantanés dans le plan mobile quand on a ramené ce plan à la position S.

Il faut démontrer que les courbes C et C′ roulent l'une sur l'autre pendant le mouvement, ce qui revient évidemment à montrer qu'elles sont tangentes au point I, et que, $t_1 - t$ tendant vers zéro, on a

$$\lim \frac{\text{arc } II_1}{\text{arc } II'_1} = 1. \tag{1}$$

Il en résultera en effet que les arcs II_1, II'_1 et pareillement les arcs $I_1 I_2$, $I'_1 I'_2$, et ainsi de suite, différeront d'une quantité infiniment petite par rapport à eux-mêmes, et par suite sur les courbes C et C′ deux arcs finis quelconques, comptés à partir de I jusqu'à deux points correspondants des deux courbes, seront égaux.

J'envisage un point quelconque M du système Σ quand il occupe la position S; M sera en M′ quand Σ sera venu en S_1, et la droite $M'I_1$ est normale en M′ à la trajectoire de ce point. On a d'ailleurs

$$MI'_1 = M'I_1$$

puisque, quand Σ passe de S en S_1, M vient en M′ et I'_1 en I_1. La différentielle du segment $M'I_1$ est donc nulle, et l'on a

$$(2) \qquad MM' \cos(MM'I_1) + I'_1 I_1 \cos(I'_1 I_1 M') = 0,$$

égalité qu'il faut bien entendre; d'après son origine même, elle est exacte aux infiniment petits près du second ordre.

Or MM′ est infiniment petit du premier ordre et il en est de même de $\cos(MM'I_1)$; d'autre part $I'_1 I_1$ a une limite, inconnue pour nous actuellement, mais que nous pouvons supposer n'être pas perpendiculaire à MI, puisque M est arbitraire.

De là résulte que $\cos(I'_1 I_1 M')$ n'est pas infiniment petit, et l'égalité (2), entendue comme nous l'avons dit. montre que $I_1 I'_1$ *est un infiniment petit du second ordre.*

La démonstration va s'achever maintenant bien aisément. Formons le petit triangle $II_1 I'_1$. On aura dans ce triangle

$$\sin I = \sin I'_1 \frac{I_1 I'_1}{II_1}.$$

Or, dans le second membre, le second facteur est le quotient d'un infiniment petit du second ordre par un infiniment petit du premier. On a donc

$$\lim \sin I = 0.$$

et, par suite, C *et* C′ *sont tangentes en* I.

Le même triangle nous donne

$$\overline{I_1 I'_1}^2 = \overline{II'_1}^2 + \overline{II_1}^2 - 2\,\overline{II_1}.\overline{II'_1}\cos I,$$

égalité qu'on peut écrire

$$\overline{I_1 I'_1}^2 = (II'_1 - II_1)^2 + 4\,\overline{II_1}.\overline{II'_1}\sin^2\frac{I}{2};$$

d'où se conclut immédiatement que la différence

$$\overline{II'_1} - \overline{II_1}$$

est du second ordre, et *la relation* (1) *est par suite établie.*

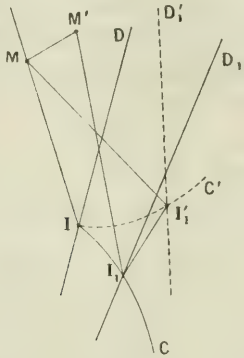
2. Nous allons suivre une marche analogue pour établir, relativement au mouvement général d'un solide invariable, le théorème concernant les deux surfaces réglées qui remplacent la base et la roulette.

Nous supposons démontrée l'existence de l'axe instantané de rotation et de glissement, et par suite à un moment déterminé les vitesses d'un point quelconque du système résultent d'une rotation autour de cet axe et d'un glissement le long du même axe.

Considérons le système Σ au temps t; il occupe une position S et nous avons l'axe instantané D. Au temps t_1, Σ est venu en S_1 et nous avons l'axe instantané D_1. Nous formons donc une première surface réglée lieu des droites D_1, D_2, ..., c'est-à-dire des axes instantanés dans l'espace, comme nous formions tout à l'heure la courbe C. Pareillement, ramenons Σ de S_1 en S en fixant D_1 dans S_1; cette droite viendra en D'_1, et nous aurons une seconde surface lieu des droites D, D'_1, ... qui est le lieu des axes instantanés dans le système mobile quand on a ramené ce système à la position S.

Sur la première surface traçons une courbe C rencontrant D, D_1, ... en I, I_1, ... Dans le transport de D_1 en D'_1 le point I_1 vient en I'_1 et nous avons alors

Fig. 2.



sur la seconde surface une courbe C′ correspondant à C et coupant D au même point I.

Cela posé, soit M un point arbitraire de Σ quand ce système est en S et soit M′ sa position quand Σ est en S_1. On a manifestement

$$MI'_1 = M'I_1,$$

et, en supposant $t_1 = t + dt$, le théorème sur la différentielle d'un segment nous donne

$$(3) \qquad MM' \cos(M'MI'_1) + I'_1 I_1 \cos(I_1 I'_1 M) = 0.$$

Le premier terme représente la projection de MM′ sur MI'_1 et à la limite sur MI, c'est-à-dire le produit par dt de la projection de la vitesse de M sur la direction MI. Mais la projection de la vitesse de M sur MI se réduit à la projection de la vitesse de translation V le long de D, car la vitesse due à la rotation est perpendiculaire à MI. Quant au second terme de (3), il représente la

projection de $I'_1 I_1$ sur $I'_1 M$ ou, ce qui revient au même, sur la direction IM.

Nous allons maintenant faire coïncider successivement IM, qui est une direction arbitraire, avec les directions des axes des coordonnées. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la vitesse de translation V dirigée suivant D, et, en désignant par x, y, z les coordonnées de I, appelons $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ les coordonnées de I_1, et $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ celles de I'_1. L'égalité (3) donne, en menant successivement IM parallèle aux axes des x, des y et des z,

$$(4) \qquad \begin{cases} -V\cos\alpha\, dt + dx - \delta x = 0, \\ -V\cos\beta\, dt + dy - \delta y = 0, \\ -V\cos\gamma\, dt + dz - \delta z = 0; \end{cases}$$

le premier terme est précédé du signe *moins*, car la direction MI est opposée à la direction IM.

Les relations (4) donnent les propriétés essentielles des deux surfaces réglées. On voit d'abord immédiatement que les deux courbes C et C′ ne sont pas tangentes en I, car on ne peut avoir

$$\frac{dx}{\delta x} = \frac{dy}{\delta y} = \frac{dz}{\delta z}.$$

Mais les deux surfaces réglées seront tangentes en I, car les trois directions

$$\begin{matrix} dx, & dy, & dz, \\ \delta x, & \delta y, & \delta z, \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{matrix}$$

sont dans un même plan, comme le montrent les relations (4). Ainsi, *les deux surfaces réglées considérées sont tangentes tout le long de* D.

3. Pour achever d'indiquer les propriétés essentielles

de ces deux surfaces, définissons le glissement de deux surfaces. Prenons une surface fixe S ; une seconde surface S′ se déplace en restant constamment en contact avec S, le nombre des points de contact étant quelconque. Soit, au temps t, A un point de contact. Regardons-le comme appartenant à S′ ; il occupera alors au temps $t + dt$ la position A′. La grandeur géométrique

$$\frac{AA'}{dt}$$

sera dite le glissement moyen des deux surfaces, et à la limite nous aurons le glissement des deux surfaces au temps t et au point A.

Nous allons évaluer le glissement au point I de nos deux surfaces réglées. A cet effet, envisageons les deux surfaces au temps $t + dt$; D'_1 est alors en D_1 et I'_1 en I_1. A l'instant $t + dt - dt$, c'est-à-dire t, nous avons la position dessinée du système. Le glissement sera le quotient de la grandeur géométrique $I_1 I'_1$ divisée par $-dt$, et par suite ses projections seront

$$\frac{\delta x - dx}{-dt}, \quad \frac{\delta y - dy}{-dt}, \quad \frac{\delta z - dz}{-dt},$$

c'est-à-dire

$$V\cos\alpha, \quad V\cos\beta, \quad V\cos\gamma.$$

Nous pouvons donc énoncer qu'*en tous les points de la génératrice commune* D, *le glissement des deux surfaces l'une sur l'autre est dirigé suivant cette génératrice et est représenté par la vitesse de translation* V *du mouvement hélicoïdal.*

SUR LE THÉORÈME DE LA CONSERVATION DES AIRES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

On sait comment, au mois de novembre 1894, M. Marey appela l'attention de l'Académie des Sciences sur les conséquences du théorème de la conservation des aires : contrairement à une opinion exprimée par Delaunay et tacitement admise par les géomètres, MM. Guyou, Maurice Lévy, Appell, Picard montrèrent que, sans l'intervention de forces extérieures, un être animé, un système déformable peuvent tourner d'un angle fini autour d'un certain axe, grâce à des mouvements intérieurs à la suite desquels leurs diverses parties reprennent leurs positions relatives initiales. Je me propose d'indiquer une disposition qui permet d'établir ce fait d'une manière extrêmement simple, susceptible d'être exposée dans les Cours les plus élémentaires; puis, à l'aide d'un calcul très facile, j'exprimerai la loi analytique du mouvement d'un système auquel le précédent se rattache comme cas particulier et qui est tout à fait analogue à un appareil imaginé par M. Lévy.

Considérons un disque horizontal, très mince, parfaitement mobile dans son plan et présentant un centre de symétrie O : du point O comme centre, décrivons sur le disque une circonférence de rayon r et supposons $2p$ animaux, de même masse m, placés deux à deux en des points diamétralement opposés sur la circonférence. Le système étant d'abord en repos, imaginons que, à un instant donné, les $2p$ animaux se mettent à marcher dans le même sens sur la circonférence, de manière que,

au bout du temps t, chacun d'eux ait parcouru un même arc, de longueur αr. Le centre de gravité O restera immobile, mais, par rapport à des axes fixes, le disque tournera dans le sens opposé à celui du mouvement relatif des animaux : soient θ l'angle dont il aura tourné au bout du temps t et $2mk^2$ son moment d'inertie relativement au point O. La somme des moments des quantités de mouvement du système par rapport au point O devant rester constamment nulle, nous aurons

$$2mk^2\frac{d\theta}{dt} - 2pmr^2\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right) = 0;$$

l'intégration donne un résultat presque aussi intuitif que l'équation différentielle, savoir :

$$2mk^2\theta - 2pmr^2(\alpha - \theta) = 0.$$

On voit que θ croît proportionnellement à α : quand α sera devenu égal à 2π, les animaux seront revenus à leurs places initiales sur le disque; mais celui-ci, sans l'intervention de forces extérieures, aura tourné de l'angle $\frac{2pr^2\pi}{k^2 + pr^2}$.

Le résultat précédent peut suggérer diverses dispositions au moyen desquelles un homme pourrait se donner un mouvement de rotation sans faire intervenir de force extérieure : en voici une assez simple. Supposons l'homme debout sur un sol excessivement poli ou au fond d'un baquet rond qui flotte sur l'eau; il porte, en guise de ceinture, la moitié inférieure d'un tore coupé suivant le plan de son équateur, supposé horizontal : enfin, dans cette sorte de gouttière, plaçons des boules que l'observateur, à l'aide de ses mains, fera rouler dans le même sens : lui-même tournera en sens contraire et par le seul jeu de ses muscles. Il arriverait à un résultat

analogue en faisant, par exemple, tourner ses bras dans le même sens autour de sa tête.

Considérons maintenant le système, analogue à l'appareil de M. Maurice Lévy, dont j'ai parlé et dont le mouvement est moins simple que le précédent. Reprenons notre disque et, à sa surface, traçons deux circonférences de rayon r, dont les centres A, A′ sont symétriques par rapport au centre O du disque, OA, OA′ étant égaux à a : aux deux points des circonférences qui sont les plus éloignés du point O, plaçons deux animaux M, M′ de même masse m. Le système étant d'abord en repos, les deux animaux se mettent à marcher sur leurs circonférences, de manière que, sur le disque, les rayons AM, A′M′ tournent avec une vitesse constante ω dans le sens opposé à celui dans lequel on comptera l'angle θ dont le disque tournera lui-même par rapport à des axes fixes OX, OY. Au bout du temps t, les coordonnées du point M, rapporté à ces axes, sont

$$x = a\cos\theta + r\cos(\theta - \omega t), \qquad y = a\sin\theta + r\sin(\theta - \omega t);$$

le moment de sa quantité de mouvement autour du point O sera

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$
$$= m\left[a^2\frac{d\theta}{dt} - \left(2\frac{d\theta}{dt} - \omega\right)ar\cos\omega t + r^2\left(\frac{d\theta}{dt} - \omega\right)\right];$$

pour le point M′, le moment est le même. La somme des moments des quantités de mouvement du système devant rester nulle, on trouve, après avoir divisé par $2m$,

$$(k^2 + a^2)\frac{d\theta}{dt} + ar\left(2\frac{d\theta}{dt} - \omega\right)\cos\omega t + r^2\left(\frac{d\theta}{dt} - \omega\right) = 0,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(r^2 + ar\cos\omega t)\omega}{k^2 + a^2 - r^2 - 2ar\cos\omega t};$$

θ étant nul pour $t = 0$, l'intégration donne

$$\theta = \frac{1}{2}\omega t + \frac{k^2 + a^2 - r^2}{\sqrt{(k^2 - a^2 - r^2)^2 + 4k^2r^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{k^2 + (a - r)^2}}{\sqrt{k^2 + (a + r)^2}} \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega t.$$

Soit α le plus petit arc positif dont le cosinus est $-\frac{r}{a}$: quand ωt croît de zéro à α, θ augmente, pour diminuer quand ωt ira de la valeur α à $2\pi - \alpha$, puis augmenter ensuite. Quand ωt est égal à 2π, les mobiles M, M′ ont repris sur le disque leurs positions initiales, mais le disque a tourné de l'angle

$$\left[1 - \frac{k^2 + a^2 - r^2}{\sqrt{(k^2 + a^2 - r^2)^2 + 4k^2r^2}}\right]\pi ;$$

cet angle serait insensible si k était très grand ou très petit, comme l'a indiqué M. Lévy pour son appareil.

LE PROBLÈME DES LABYRINTHES;

PAR M. G. TARRY.

Tout labyrinthe peut être parcouru en une seule course, en passant deux fois en sens contraire par chacune des allées, sans qu'il soit nécessaire d'en connaître le plan.

Pour résoudre ce problème, il suffit d'observer cette règle unique :

Ne reprendre l'allée initiale qui a conduit à un carrefour pour la première fois que lorsqu'on ne peut pas faire autrement.

Nous ferons d'abord quelques remarques.

A un moment quelconque, avant d'arriver à un car-

refour ou après l'avoir quitté, tout carrefour autre que celui du point de départ contient nécessairement un nombre pair d'allées parcourues une seule fois, et le nombre de ces allées suivies dans le sens de l'arrivée est égal au nombre de celles suivies dans le sens inverse de la sortie. Cela est évident, puisque le nombre des entrées est égal à celui des sorties, et qu'une allée peut être parcourue deux fois au plus et en sens contraire. Par suite, au moment d'une arrivée dans ce carrefour, le nombre des allées parcourues une seule fois et dans le sens de l'arrivée surpasse d'une unité le nombre des allées parcourues une seule fois et dans le sens de la sortie. S'il n'existe qu'une allée parcourue une seule fois, ce ne peut être que l'allée initiale, et nécessairement toutes les autres allées ont été inexplorées ou parcourues deux fois en sens contraire. On ne peut donc être arrêté à ce carrefour, et l'on sera forcé de reprendre l'allée initiale dans le cas seulement où toutes les autres allées auront été parcourues deux fois.

Ainsi, en suivant la règle, on ne peut être arrêté qu'au point de départ, et l'on ne reprend l'allée initiale d'un carrefour qu'après avoir parcouru deux fois toutes les autres allées du carrefour.

Considérons maintenant le carrefour du point de départ. Au moment d'une arrivée à ce carrefour, le nombre des allées parcourues une seule fois et dans le sens de l'arrivée est égal au nombre des allées parcourues une seule fois et dans le sens de la sortie. Par conséquent, on ne peut être arrêté que s'il n'existe ni allées inexplorées, ni allées parcourues une seule fois.

Donc, au moment de l'arrêt forcé au carrefour du départ, toutes les allées de ce carrefour ont été parcourues deux fois.

Cela posé, soient A, B, C, D, ..., Z le carrefour du

départ et les autres carrefours, désignés dans l'ordre de leurs découvertes successives pendant l'exploration.

Si l'on a exécuté rigoureusement l'application de la règle unique, toutes les allées aboutissant aux carrefours B, C, D, ..., Z ont été parcourues nécessairement deux fois en sens contraires, comme les allées du carrefour du départ A.

En effet, l'allée initiale AB du carrefour B, qui aboutit au carrefour A, ayant été parcourue deux fois en sens contraires, toutes les allées du carrefour B ont été parcourues deux fois en sens contraires. De même, toutes les allées du carrefour C ont été parcourues deux fois, puisque son allée initiale BC (ou AC si AB est une impasse), qui aboutit au carrefour B (ou A) a été parcourue deux fois. Enfin, un carrefour quelconque T, dont l'allée initiale aboutit nécessairement à un carrefour précédent (ou A, ou B, ..., ou S), a été entièrement exploré, puisque son allée initiale a été parcourue deux fois. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Supposons qu'en prenant une allée pour la première fois on dépose à l'entrée deux marques et à la sortie une ou trois marques, suivant que cette allée débouche dans un carrefour déjà visité ou dans un carrefour nouveau, et qu'en prenant une allée où se trouve une marque à l'entrée, et la suivant par conséquent une seconde fois en sens contraire, on se contente d'ajouter une deuxième marque à l'entrée. A l'arrivée dans un carrefour on saura toujours distinguer les allées nouvelles qui n'ont aucune marque, l'allée initiale qui a trois marques et les autres allées parcourues une seule fois et dans le sens de l'arrivée qui ont une seule marque.

La règle unique s'énoncera alors sous cette forme :

En arrivant à un carrefour, prendre à volonté une

allée qui n'a pas de marque ou bien une allée qui a une seule marque, et s'il n'en existe pas prendre l'allée qui a trois marques.

En suivant cette marche pratique, un voyageur perdu dans un labyrinthe ou dans des catacombes, retrouvera forcément l'entrée avant d'avoir parcouru toutes les allées et sans passer plus de deux fois par la même allée.

Ce qui démontre qu'un labyrinthe n'est jamais inextricable, et que le meilleur fil d'Ariane est le fil du raisonnement.

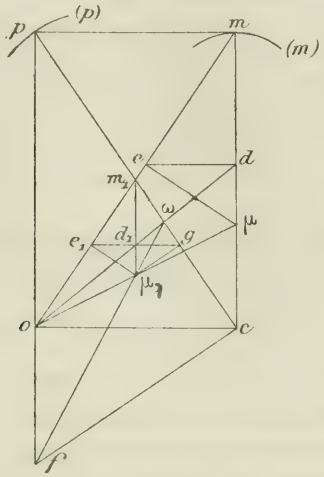
Remarque. — La règle générale permet de toujours rétrograder en arrivant à un carrefour déjà exploré par une voie nouvelle. Si l'on s'impose cette obligation, quand on arrivera à un carrefour par une voie antérieurement suivie, on ne trouvera qu'une allée parcourue une seule fois, l'allée initiale, et il ne sera permis de prendre cette allée qu'à défaut de voie qui n'aurait pas été parcourue. Il est clair que, dans ce cas, il devient inutile de distinguer par une marque spéciale le débouché d'une allée initiale. Cette solution particulière a été trouvée par M. Trémaux (voir les *Récréations mathématiques* de E. Lucas).

CONSTRUCTIONS DU CENTRE DE COURBURE D'UNE PODAIRE;

Par un ancien élève de Mathématiques spéciales.

Le point fixe que l'on projette sur les tangentes à la courbe donnée (m) est o. Sur la tangente mp, on a le

point p de la podaire (p). La projection de o en c sur la normale en m à (m) conduit à la normale pc à (p).



Substituons à (m) une conique ayant pour foyer le point o et pour rayon de courbure en m le rayon de courbure $m\mu$ de (m).

La podaire de cette conique relative à son foyer o est un cercle qui n'est autre que le cercle osculateur de (p). Le centre de ce cercle podaire est celui de la conique et, en vertu d'une construction connue du centre de courbure d'une conique, on le détermine ainsi : *on projette μ en e sur om et l'on projette ce point e en d sur $m\mu$: la droite od coupe pc au centre cherché ω.*

Passons à une autre construction de ce centre de courbure de (p).

On peut obtenir ce point ω en construisant d_1 au moyen des points m_1 et μ_1, milieux de om et de $o\mu$, comme on a fait pour déterminer d. Ce point d_1 peut s'obtenir aussi en projetant μ_1 en g sur m_1c et en projetant ce point g en d_1 sur $m_1\mu_1$.

Élevons cf perpendiculairement à cp. Les triangles $d_1\mu_1 g$ et ofc sont homothétiques, donc la droite $f\mu_1$ contient ω. *Le point ω est donc aussi à la rencontre de pc et de la droite qui joint f au point μ_1, milieu de $o\mu$.*

Cette dernière construction est celle donnée par M. d'Ocagne, p. 112 de ce Volume, et dont il demandait une démonstration directe.

SUR LES APPLICATIONS DES PROPRIÉTÉS DE LA STROPHOIDE [1];

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Les propriétés si intéressantes des points conjugués de la strophoïde sont très utiles à connaître dans l'étude d'un grand nombre de questions et servent à généraliser des résultats connus.

On trouve la strophoïde comme lieu géométrique dans plusieurs problèmes importants. En général, les points dont on cherche le lieu se présentent par groupes de deux, qui sont précisément les groupes de points conjugués, ce que l'on reconnaît facilement. Il en est ainsi, par exemple, dans les problèmes suivants :

Lieu des points de contact des tangentes menées à des coniques homofocales par un point.

Lieu des foyers des coniques bitangentes à une conique fixe en deux points fixes.

Lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible, etc.

---

[1] Cette Note est le complément de celle parue en octobre 1893 dans les *Nouvelles Annales* sous ce titre : *Sur un lieu géométrique et ses applications.*

En appliquant les propriétés de la strophoïde, on pourra alors énoncer immédiatement diverses propositions.

Ainsi, puisque l'enveloppe des droites joignant les groupes de points conjugués est une parabole dont la directrice passe par le point double, on voit que l'enveloppe des polaires d'un point relativement à des coniques homofocales, l'enveloppe des axes des coniques bitangentes à une conique en deux points fixes, l'enveloppe des axes des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible, l'enveloppe des axes des coniques tangentes à deux droites données et ayant pour directrice une droite donnée, etc., sont des paraboles.

Puisque la projection du point double sur la droite joignant deux points conjugués appartient à la strophoïde, on voit que le lieu des projections d'un point sur ses polaires par rapport à des coniques homofocales est la même strophoïde qui est le lieu des points de contact des tangentes, ou, en d'autres termes, que la projection d'un point sur sa polaire par rapport à une conique est le point de contact d'une conique homofocale tangente à cette polaire. On voit de même que le lieu des projections d'un point O sur les axes des coniques bitangentes à une conique aux points de contact des tangentes issues de O est la même strophoïde que le lieu de leurs foyers, etc.

Puisque le cercle circonscrit au triangle formé par le point double et deux points conjugués quelconques passe par un point fixe, on peut dire que, si d'un point on mène les tangentes à une conique, le cercle circonscrit au triangle formé par le point donné et les points de contact, passe par un point fixe quand la conique se déforme en gardant les mêmes foyers, etc.

Voici maintenant des théorèmes obtenus en utilisant

cette remarquable propriété de la strophoïde : La droite joignant un point quelconque de la courbe au point double est bissectrice de l'angle des droites joignant le même point à deux points conjugués quelconques.

a. Si d'un point P on mène les tangentes à deux coniques homofocales, les droites joignant un point de contact M sur une conique aux points de contact sur l'autre ont pour bissectrice la droite MP.

b. Lorsque deux coniques sont bitangentes, les droites joignant un foyer F *de l'une aux deux foyers de l'autre ont pour bissectrice la droite joignant* F *au point de concours* O *des tangentes communes.*

Supposons que les deux points de tangence des coniques se réunissent en un seul, M ; les deux coniques sont alors surosculatrices au point M; le point O est aussi venu en M et l'on a ce théorème :

c. Lorsqu'une conique Σ *est surosculatrice à une conique* S *au point* M, *la droite joignant un foyer* F *de* Σ *au point* M *est bissectrice de l'angle des droites joignant le même foyer* F *aux deux foyers de* S.

Par suite, en appliquant le théorème fondamental qui permet de reconnaître qu'un lieu est une strophoïde :

Le lieu des foyers des coniques surosculatrices à une conique donnée en un point donné est une strophoïde ayant ce point pour point double.

On pourrait ajouter que l'enveloppe des axes est une parabole, que le cercle circonscrit au triangle formé par le point de surosculation et deux foyers d'une conique passe par un point fixe, etc.

d. Si l'on considère une conique inscrite dans un

quadrilatère circonscriptible, la droite joignant un foyer de cette conique au centre du cercle bissecte les droites joignant le même foyer aux deux foyers de l'une quelconque des autres coniques inscrites.

On pourrait multiplier ces exemples d'élégantes propositions obtenues en appliquant les propriétés de la strophoïde. Nous préférons montrer comment elles permettent de généraliser certains lieux connus.

Ainsi, on sait que le lieu des foyers des coniques bitangentes à une conique en deux points fixes est une strophoïde, mais le théorème est susceptible de plus de généralité.

Considérons une famille de coniques homofocales et un point O. Menons les tangentes OA, OB à une conique Σ de la famille, et considérons une conique quelconque bitangente à Σ aux points A et B. On voit facilement que ses foyers appartiennent à la strophoïde, lieu des points de contact des tangentes menées aux coniques Σ par le point O. Ainsi :

Étant donnée une famille de coniques homofocales Σ, *si par un point fixe* O *on mène les tangentes à une conique quelconque de la famille, le lieu des foyers de toutes les coniques bitangentes à* CHACUNE *des coniques* Σ *aux points de contact des tangentes issues de* O *est la même strophoïde* [1].

Voici deux autres exemples de ces généralisations :

1° *Étant donné un quadrilatère circonscriptible à*

---

[1] Ce système formé de coniques bitangentes à des coniques homofocales aux points de contact des tangentes menées par un point O du plan est celui que l'on obtient en coupant un système de quadriques homofocales par un plan.

Le point O est le point de contact de la quadrique tangente au plan de section.

un cercle, le lieu des points de contact des tangentes (ou des pieds des normales) menées par le centre du cercle à toutes les coniques homofocales à CHACUNE *des coniques inscrites dans le quadrilatère est la même strophoïde.*

C'est la strophoïde qui est en même temps le lieu des foyers, etc. (Voir *Sur un lieu géométrique et ses applications.*) A tout quadrilatère circonscriptible se trouve ainsi associée une strophoïde S qui jouit de propriétés extrêmement remarquables.

2° Le lieu des points de rencontre des tangentes menées par deux points fixes à une série de cercles concentriques est une strophoïde ayant son point double au centre des cercles, et les deux points donnés pour points conjugués. Mais ce lieu peut être généralisé bien davantage :

On considère une famille de coniques homofocales (S), *et une série de cercles concentriques* (C) *ayant pour centre un point quelconque* O *du plan. On mène les tangentes communes à un cercle* C *et à une conique* S. *Quelle que soit la conique de la famille et quel que soit le cercle de la série, le lieu des points de rencontre des tangentes communes est la même strophoïde.*

Elle a son point double en O et les deux foyers des coniques S sont deux points conjugués (les points du lieu se partagent d'ailleurs en couples de points conjugués, d'où l'énoncé de diverses remarques intéressantes).

Rectification. — Dans ma Note *Sur l'hyperbole équilatère et ses inverses*, j'ai dit, par inadvertance, que le point fixe R par lequel passent les cercles circonscrits aux triangles formés par le point double et deux points conjugués quelconques était le milieu de la distance du point double au conjugué du point réel à l'infini

(qui est le foyer singulier de la strophoïde). C'est le symétrique du point double par rapport au foyer singulier qu'il faut lire. Même rectification doit être faite dans les théorèmes où figure le point R (p. 273 et 276).

DES CONDITIONS POUR QUE L'ÉCHELLE D'UNE SUITE RÉCURRENTE SOIT IRRÉDUCTIBLE;

PAR M. ED. MAILLET,
Ingénieur des Ponts et Chaussées [1].

II.

AUTRE MANIÈRE D'ÉTABLIR UN CRITERIUM POUR LA RÉDUCTIBILITÉ D'UNE LOI POUR UNE SUITE RÉCURRENTE DONNÉE.

Supposons que la loi (1) soit réductible à la loi (2), pour la suite considérée; on aura

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} Y_{p-1} + a_1 Y_{p-2} + \ldots + a_{p-1} Y_0 = 0, \\ Y_p + a_1 Y_{p-1} + \ldots + a_{p-1} Y_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_{2p-2} + a_1 Y_{2p-3} + \ldots + a_{p-1} Y_{p-1} = 0, \end{array}\right.$$

et, par suite,

$$(4)\quad \begin{vmatrix} Y_{p-1} & Y_{p-2} & \ldots & Y_0 \\ Y_p & Y_{p-1} & \ldots & Y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_{2p-2} & Y_{2p-3} & \ldots & Y_{p-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition est nécessaire; on aurait même plus

---

[1] *Voir* même Tome, p. 152.

généralement [1] :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} Y_{n+p-1} & Y_{n+p-2} & \dots & Y_n \\ Y_{n+p} & Y_{n+p-1} & \dots & Y_{n+1} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ Y_{n+2p-2} & Y_{n+2p-3} & \dots & Y_{n+p-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons que le déterminant (4) est symétrique par rapport à la diagonale $Y_0, \dots, Y_{2p-2}$.

Supposons maintenant que la suite considérée satisfasse à une loi d'ordre $p-2$

$$(6)\qquad Y_n + b_1 Y_{n-1} + \dots + b_{p-2} Y_{n-p+2} = 0.$$

On aura

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} Y_{p-2} & Y_{p-3} & \dots & Y_0 \\ Y_{p-1} & Y_{p-2} & \dots & Y_1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ Y_{2p-4} & Y_{2p-5} & \dots & Y_{p-2} \end{vmatrix} = 0,$$

d'après ce qui précède.

Considérons le mineur principal du premier ordre du déterminant (4)

$$(8)\qquad \delta_i = \begin{vmatrix} Y_{p-1} & \dots & Y_{i+1} & Y_{i-1} & \dots & Y_0 \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ Y_{p+i-2} & \dots & Y_{2i} & Y_{2i-2} & \dots & Y_{i-1} \\ Y_{p+i} & \dots & Y_{2i+2} & Y_{2i} & \dots & Y_{i+1} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ Y_{2p-2} & \dots & Y_{p+i} & Y_{p+i-2} & \dots & Y_{p-1} \end{vmatrix}.$$

D'après (6), on aura

$$\delta_i = -\begin{vmatrix} b_1 Y_{p-2} + \dots + b_{p-2} Y_1 & \dots & Y_{i+1} & Y_{i-1} & \dots & Y_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ b_1 Y_{p+i-3} + \dots + b_{p-2} Y_i & \dots & Y_{2i} & Y_{2i-2} & \dots & Y_{i-1} \\ b_1 Y_{p+i-1} + \dots + b_{p-2} Y_{i+2} & \dots & Y_{2i+2} & Y_{2i} & \dots & Y_{i+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ b_1 Y_{2p-3} + \dots + b_{p-2} Y_p & \dots & Y_{p+i} & Y_{p+i-2} & \dots & Y_{p-1} \end{vmatrix}.$$

---

[1] Toutes les lois, la loi (1) par exemple, donnent lieu à des relations analogues.

Ce déterminant peut être décomposé en $p-2$ autres dont $p-3$ sont nuls comme ayant leurs colonnes proportionnelles, en sorte que

$$\delta_i = -b_i \begin{vmatrix} Y_i & Y_{p-2} & \dots & Y_{i+1} & Y_{i-1} & \dots & Y_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{2i-1} & Y_{p+i-3} & \dots & Y_{2i} & Y_{2i-2} & \dots & Y_{i-1} \\ Y_{2i+1} & Y_{p+i-1} & \dots & Y_{2i+2} & Y_{2i} & \dots & Y_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{p+i-1} & Y_{2p-3} & \dots & Y_{p+i} & Y_{p+i-2} & \dots & Y_{p-1} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui multiplie b_i dans le deuxième membre est au signe près un mineur du premier ordre du déterminant (4) qui est compris dans les mêmes colonnes de (4) que le mineur (7), et qui, par suite, est nul, d'après un théorème connu, puisque le déterminant (4) est symétrique par rapport à la diagonale $Y_0, \dots, Y_{2p-2}$.

Il en résulte qu'un mineur quelconque du premier ordre de (4) est nul.

La démonstration aurait pu d'ailleurs s'opérer de même en partant d'un mineur quelconque du premier ordre de (4), directement.

Ainsi, quand pour la suite considérée la loi (1) d'ordre p est réductible à l'ordre $p-2$, le déterminant (4) et ses mineurs du premier ordre sont nuls.

La propriété est d'ailleurs générale et s'établit par des procédés analogues.

Supposons que la loi soit réductible à l'ordre $p-q$ pour la suite considérée, laquelle satisfera alors à la loi

$$(9) \qquad Y_n + c_1 Y_{n-1} + \dots + c_{p-q} Y_{n-p+q} = 0, \qquad q > 1.$$

D'après ce qu'on a vu au début, la suite satisfera à des lois d'ordre $p-1$, $p-2$, ..., $p+q+1$; nous savons que le déterminant (4) et ses mineurs du premier

ordre sont tous nuls; admettons qu'il en soit de même pour tous les mineurs d'ordre $\leqq q-2$ et montrons qu'il en est de même des mineurs d'ordre $q-1$, en remarquant que le mineur d'ordre $q-1$

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} Y_{p-q} & Y_{p-q-1} & \dots & Y_0 \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ Y_{2(p-q)} & Y_{2(p-q)-1} & \dots & Y_{p-q} \end{vmatrix} = 0$$

à cause [1] de l'existence de la loi (9).

Supposons qu'il y ait des mineurs d'ordre $q-1$ qui soient différents de zéro; parmi ceux d'entre eux qui sont contenus dans les mêmes $(p-q+1)$ lignes arbitrairement choisies de (4), de la forme

$$(11)\qquad \delta = \begin{vmatrix} Y_r & \dots & Y_s \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{r_1} & \dots & Y_{s_1} \end{vmatrix}.$$

où l'on suppose que, comme dans (4), les colonnes soient ordonnées de façon que dans chaque ligne les indices aillent en décroissant, et que

$$(12)\qquad r > \dots > s, \qquad \dots, \qquad r_1 > \dots > s_1;$$

choisissons celui δ pour lequel les indices de la première colonne sont le plus petit possible : il suffit d'ailleurs que cette condition soit remplie pour une ligne de δ, la première par exemple, pour qu'elle ait lieu pour les autres lignes. Par hypothèse $\delta \neq 0$; par suite, on aura $r-s > p-q$, sans quoi, à cause des conditions (12), δ serait contenu dans les mêmes colonnes que (10), et serait nul, puisque (4) est symétrique par rapport à la diagonale $Y_0, \dots, Y_{2p-2}$.

La relation (9) permettra alors de remplacer chaque

---

[1] Il suffit, pour le voir, d'écrire les équations analogues à (3) résultant de la loi (9).

élément de la première colonne de δ en fonction linéaire homogène d'éléments d'indices respectivement plus petits compris dans la même ligne de (4). Le mineur δ sera donc égal à une fonction linéaire homogène de déterminants mineurs de (4) d'ordre $q - 1$; si dans chacun de ces déterminants on ordonne les colonnes de la même manière que pour δ, les indices de la première colonne seront respectivement plus petits que les indices de la première colonne de δ compris dans les mêmes lignes. D'après l'hypothèse que nous avons faite sur δ, ces déterminants seront tous nuls, et dès lors il en sera de même de δ.

On ne peut donc supposer $\delta \neq 0$.

On en conclut pour $q = 3$ que le déterminant (4) et ses mineurs des deux premiers ordres sont nuls; par suite, pour $q = 4$, le déterminant (4) et ses mineurs des trois premiers ordres sont nuls; et ainsi de suite. D'où l'on tire :

Pour que la loi (1) *d'ordre p soit réductible pour la suite considérée à l'ordre $p - q$, il est nécessaire que le déterminant* (4) *et tous ses mineurs jusqu'à l'ordre $q - 1$ soient tous nuls.*

Remarquons que l'on aurait pu raisonner identiquement de même sur le déterminant (5) : il aurait suffi d'augmenter partout les indices de la quantité n.

Remarquons également qu'on pourrait ne pas invoquer les propriétés des déterminants symétriques. Il suffirait pour cela d'opérer à l'aide des lois (6) et (9) sur les éléments de chaque colonne de δ_i et δ qui ont dans cette colonne les plus forts indices, et qui sont d'ailleurs compris dans une même ligne, comme nous l'avons fait sur les éléments de la première colonne de δ_i et δ. On supposerait de plus que δ_i est un mineur quelconque du

premier ordre. En répétant au besoin cette opération sur les nouveaux mineurs obtenus, on finirait par voir que δ_i et δ sont proportionnels respectivement aux mineurs (7) et (10), et par suite nuls.

Je dis maintenant que la condition nécessaire que nous venons de trouver est suffisante.

Supposons que le déterminant (4) et ses mineurs jusqu'à l'ordre $r-1$ soient nuls, mais qu'un mineur d'ordre r soit $\neq 0$.

Si l'on pose un système analogue à (3)

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0 Y_{p-1} + a_1 Y_{p-2} + \ldots + a_{p-1} Y_0 = 0, \\ a_0 Y_p + a_1 Y_{p-1} + \ldots + a_{p-1} Y_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_0 Y_{2p-2} + a_1 Y_{2p-3} + \ldots + a_{p-1} Y_{p-1} = 0, \end{array}\right.$$

on sait que l'on peut y satisfaire par des valeurs de a_0, $a_1, \ldots, a_{p-1}$, dont $p-r$; celles qui correspondent aux colonnes du mineur d'ordre r différent de zéro, sont déterminées en fonction des r autres choisies arbitrairement.

D'ailleurs, multiplions les deux membres de ces p équations respectivement par A_p, $A_{p-1}, \ldots, A_1$ et ajoutons membre à membre; il vient

$$\begin{aligned} &(A_1 Y_{2p-2} + \ldots + A_p Y_{p-1}) a_0 + \ldots \\ &\quad + (A_1 Y_{p-1} + \ldots + A_p Y_0) a_{p-1} = 0. \end{aligned}$$

ou, d'après (1),

$$(13)\qquad a_0 Y_{2p-1} + \ldots + a_{p-1} Y_p = 0.$$

En opérant sur les $p-1$ dernières équations (12) et sur (13) comme nous venons de le faire sur les p équations (12), puis continuant de la sorte, on aura évidemment

$$(14)\qquad a_0 Y_n - a_1 Y_{n-1} + \ldots + a_{p-1} Y_{n-p+1} = 0;$$

c'est-à-dire que la suite satisfait à la loi (14) où r des coefficients convenablement placés sont arbitraires.

Dès lors, parmi les rapports des quantités $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ à la première d'entre elles qui ne s'annule pas (et l'on sait qu'il y en a), il y en aura $r-1$ arbitraires, et l'équation génératrice de la loi (14) renfermera $r-1$ coefficients arbitraires : on pourra donc fixer arbitrairement la valeur de $r-1$ racines de cette équation génératrice qui est au plus de degré $p-1$, et, d'après ce que nous avons vu, d'après la relation (c) en particulier, l'équation génératrice de la loi irréductible à laquelle satisfait la suite est de degré $\leqq (p-1)-(r-1)=p-r$, ainsi qu'on le montre facilement. La suite satisfait à une loi d'ordre $p-r$: elle ne peut satisfaire à une loi d'ordre moindre, d'après ce qui précède, puisqu'il y a un mineur d'ordre r différent de zéro. Donc [1] :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la loi* (1) *d'ordre p soit réductible à l'ordre $p-q$ pour une suite récurrente*

$$Y_0, \quad Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_n, \quad \ldots,$$

satisfaisant à cette loi, est que le déterminant

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} Y_{p-1} & Y_{p-2} & \ldots & Y_0 \\ Y_p & Y_{p-1} & \ldots & Y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_{2p-2} & Y_{2p-3} & \ldots & Y_{p-1} \end{vmatrix}$$

soit nul ainsi que tous ses mineurs d'ordre $\leqq q-1$.

On obtient ainsi sous forme explicite, et sans avoir d'élimination à faire, les conditions nécessaires et suffi-

---

[1] M. Kronecker est arrivé à ce théorème par une méthode semblable, quoique légèrement différente (*Monatsberichte der Berl. Akad.*, 16 juin 1881.)

santes pour que la loi (1) soit réductible à l'ordre $p-q$ pour la suite considérée, puisque l'on peut toujours exprimer $Y_p, \ldots, Y_{2p-2}$ à l'aide de $Y_{p-1}, \ldots, Y_0$ qui sont donnés et des coefficients $A_1, \ldots, A_p$.

En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que la loi soit réductible pour la suite considérée, ou pour que les équations $\Phi(x)=0$ et $\Psi_{p-1}(x)=0$ aient une racine commune, est que le déterminant (4) soit égal à zéro.

On déduit de ce théorème et de la Section II du Mémoire de M. M. d'Ocagne le corollaire suivant :

Corollaire. — La condition nécessaire et suffisante pour que chaque terme général d'une suite du $p^{\text{ième}}$ ordre, quelconque, soit une fonction linéaire homogène de p termes généraux consécutifs d'une suite donnée de même échelle est que l'échelle considérée soit irréductible pour cette dernière suite.

Cette propriété a d'ailleurs été établie et utilisée par M. M. d'Ocagne, quand la suite donnée est ce qu'il a appelé *la suite fondamentale.*

III.

APPLICATIONS.

1° L'équation

$$\Psi_{p-1}(x) = Y_{p-1} + Q_1(x)\,Y_{p-2} + \ldots + Q_{p-1}(x)\,Y_0 = 0$$

est de la forme

$$x^{p-1} + \alpha_1 x^{p-2} + \ldots + \alpha_{p-1} = 0. \tag{15}$$

On pourra toujours déterminer $Y_{p-1}, \ldots, Y_0$ de façon que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ aient des valeurs choisies arbitrairement, ou que (15) soit une équation quelconque de

degré $p-1$, car on est conduit au système

$$(16)\quad \begin{cases} Y_0 = 1, \\ A_1 Y_0 + Y_1 = \alpha_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_{p-1} Y_0 + A_{p-2} Y_1 + \dots + Y_{p-1} = \alpha_{p-1}, \end{cases}$$

où le déterminant des coefficients est égal à l'unité.

La condition nécessaire et suffisante pour que les équations $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{p-1}(x) = 0$ aient une racine commune est que le déterminant (4) soit nul. On pourra donc exprimer, en égalant à zéro un déterminant analogue à (4), de côté $p-1$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation de degré p et une de degré $p-1$ aient une racine commune.

Si, en particulier, on prend

$$\alpha_1 = A_1 \frac{p-1}{p}, \quad \dots, \quad \alpha_j = A_j \frac{p-j}{p}, \quad \dots, \quad \alpha_{p-1} = A_{p-1} \frac{1}{p},$$

le polynome $\Psi_{p-1}(x)$ sera égal à la dérivée de $\Phi(x)$ divisée par p. La condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi(x) = 0$ ait une racine double sera donc que le déterminant (4) soit nul. On en conclut :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'échelle* $(A_1, \dots, A_p)$ *soit irréductible pour la suite qui y satisfait et qui est définie par les* p *valeurs des termes initiaux* $Y_0, \dots, Y_{p-1}$ *telles que*

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1, \\ A_1 Y_0 + Y_1 &= A_1 \frac{p-1}{p}, \\ A_2 Y_0 + A_1 Y_1 + Y_2 &= A_2 \frac{p-2}{p}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_{p-1} Y_0 + A_{p-2} Y_1 + \dots + Y_{p-1} &= A_{p-1} \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

est que l'équation génératrice

$$\Phi(x) = x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p = 0$$

n'ait pas de racine double.

2° M. M. d'Ocagne a énoncé (¹) la propriété suivante :

Les puissances $p^{\text{ièmes}}$ des nombres entiers

$$0^\mu, \quad 1^\mu, \quad 2^\mu, \quad \ldots, \quad n^\mu, \quad \ldots$$

forment une suite récurrente qui admet pour polynome générateur irréductible $(x-1)^{\mu+1}$.

En formant pour ces suites le déterminant analogue de (5), on en conclut l'identité

$$\begin{vmatrix} x^\mu & (x+1)^\mu & \ldots & (x+\mu-1)^\mu \\ (x+1)^\mu & (x+2)^\mu & \ldots & (x+\mu+2)^\mu \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ (x+\mu+1)^\mu & (x+\mu+2)^\mu & \ldots & (x+2\mu+2)^\mu \end{vmatrix} = 0,$$

qui a lieu quel que soit (x).

Il nous suffira de signaler, dès lors, que cet autre théorème de M. M. d'Ocagne (²)

Toute fonction algébrique et entière des termes de même rang de plusieurs suites récurrentes engendre elle-même une suite récurrente,

donnera lieu à une foule d'identités analogues.

Si $f(x)$ est un polynome entier en x de degré $\mu+1$, on aura

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+1) & \ldots & f(x+\mu-1) \\ f(x+1) & f(x+2) & \ldots & f(x+\mu+2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f(x+\mu+1) & f(x+\mu+2) & \ldots & f(x+2\mu+2) \end{vmatrix} = 0,$$

quel que soit x.

(¹) *Loc. cit.*
(²) *Loc. cit.*

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE [suite (¹)];

PAR M. LE CAPITAINE E. BARISIEN.

Rayon de courbure de la première podaire — On trouve sans difficulté, en faisant $m = 1$ dans la formule (11) et tenant compte des valeurs de r, r', r'',

$$R_1 = \frac{a^3 b^3}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}\,[a^2(2b^2 - a^2)\sin^2\theta + b^2(2a^2 - b^2)\cos^2\theta]}.$$

L'examen du dénominateur montre que R_1 ne peut devenir infini que si

$$a > b\sqrt{2},$$

auquel cas la podaire a des points d'inflexion. Dans ce cas, il est inutile de chercher la longueur de la développée de la première podaire, puisqu'elle a des branches infinies. Mais, lorsque

$$a < b\sqrt{2},$$

on a pour la longueur S_1 de la développée de la première podaire

$$S_1 = 4[R_1]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{4[b^3(2a^2 - b^2) - a^3(2b^2 - a^2)]}{(2a^2 - b^2)(2b^2 - a^2)}.$$

Rayon de courbure de la $m^{ième}$ podaire. — On a de même

$$R_m = ab\,\frac{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^{\frac{2m-3}{2}}}{(a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^{\frac{m-1}{2}}}$$
$$\times \left[\frac{a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta + mc^2(b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta)}{a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta + (m+1)c^2(b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta)}\right].$$

(¹) *Voir* même Tome, p. 157.

Et si

$$a > c\sqrt{m+1},$$

la développée de la $m^{\text{ième}}$ podaire est une courbe fermée d'aire S_m

$$S_m = 4[R_m]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{4(a-b)[m^2c^4 + ab(a^2+ab+b^2)]}{(a^2+mc^2)(b^2-mc^2)}.$$

Pour $m = 0$, on retrouve bien la longueur de la développée de la courbe

$$S_0 = \frac{4(a^3-b^3)}{ab}.$$

Aire de la première anti-podaire de l'ellipse. — La formule (13) donne

$$\frac{dU_{-1}}{d\theta} = \frac{a^2b^2}{2}\frac{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^3}$$
$$- \frac{a^2b^2c^2}{2}\frac{(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^3}.$$

Donc

$$U_{-1} = 2a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)\,d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^3}$$
$$- 2a^2b^2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)\,d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^3}.$$

Ces intégrations s'effectuent facilement, comme dans le cas des podaires, et l'on trouve

$$U_{-1} = \pi ab - \frac{\pi c^4}{8ab}.$$

Donc

L'aire de la première anti-podaire du centre de l'ellipse est égale à l'aire de l'ellipse diminuée du tiers de l'aire de la développée de l'ellipse.

Aire de la $m^{ième}$ anti-podaire de l'ellipse. — On obtient par la formule (14)

$$U_{-m} = 2(m+1)a^2b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^m}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m+1}}\,d\theta$$
$$- 2ma^4b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{m-1}}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m+1}}\,d\theta.$$

Rayon de courbure de la première anti-podaire. — On a par la formule (15)

$$R_{-1} = \frac{ab}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2} \times [a^2(2a^2 - b^2)\sin^2\theta + b^2(2b^2 - a^2)\cos^2\theta].$$

R_{-1} n'est jamais infini, quel que soit le rapport de a à b.

La développée de la première anti-podaire est donc toujours une courbe fermée qui a pour longueur

$$S_{-1} = L[R_{-1}]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{a^2b^2}[b^3(2a^2 - b^2) - a^3(2b^2 - a^2)].$$

Rayon de courbure de la $m^{ième}$ anti-podaire. — On a de même

$$R_{-m} = \frac{ab(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{\frac{m+3}{2}}}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{2m+3}{2}}} \times \left[\frac{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta - mc^2(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta - (m-1)c^2(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)}\right].$$

Si donc

$$b > c\sqrt{m-1},$$

la développée de la $m^{ième}$ anti-podaire n'aura pas de branches infinies et sa longueur S_{-m} sera

$$S_{-m} = \frac{4(a-b)[m^2c^4 + ab(a^2 + ab + b^2)]}{(a^2 - mc^2)(b^2 - mc^2)}.$$

Aire de la podaire de la développée de l'ellipse. — La formule (17) donne

$$W_1 = 2a^4b^4c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^2}$$
$$= \frac{\pi}{2}(a-b)^2.$$

La comparaison des aires U_1 et W_1 donne lieu à la relation suivante :

$$U_1 - W_1 = \pi ab,$$

c'est-à-dire que la différence des aires de la première podaire de l'ellipse et de la podaire de la développée de l'ellipse est égale à l'aire de l'ellipse.

Aire de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ *podaire.*—On trouve par application de la formule (18)

$$W_m = 2ma^4b^4c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m-3}\,d\theta}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{m+1}}$$
$$-2(m-1)a^2b^2c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m-3}\,d\theta}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{m}}.$$

En posant $\operatorname{tang}\theta = u$, on effectuerait ces intégrales comme pour les aires des podaires et anti-podaires, en les ramenant aux intégrales connues de la forme

$$\int_0^\infty \frac{du}{(a^4u^2 + b^4)^p}.$$

Aire de la podaire de la développée de la $m^{ième}$ *anti-podaire de l'ellipse.* — La formule (19) donne

$$W_{-m} = 2ma^2b^2c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{m-1}}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m+1}}$$
$$-2(m-1)a^4b^4c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{m-2}\,d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m+1}}.$$

En particulier, pour $m = 1$, on a

$$W_{-1} = 2a^2b^2c^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3} = \frac{\pi c^4}{8ab}.$$

En comparant U_{-1} et W_{-1}, on a la relation

$$U_{-1} + W_{-1} = \pi ab.$$

Donc l'aire de la première anti-podaire de l'ellipse augmentée de l'aire de la podaire de la développée de cette anti-podaire est égale à l'aire de l'ellipse.

Nous avons donc aussi pour l'ellipse

$$U_1 - W_1 = U_{-1} + W_{-1}.$$

De quelques autres propriétés des podaires de l'ellipse. — Voici d'autres propriétés sur les podaires d'ellipse qui sont faciles à démontrer et qu'il suffit de signaler :

1° L'aire de la podaire d'un point (α, β) du plan d'une ellipse est

$$A = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2);$$

2° L'aire du lieu des projections du point (α, β) sur les normales à l'ellipse a pour expression

$$A' = \frac{\pi}{2}(a - b)^2 + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2);$$

3° Comme conséquence des deux premières propositions, on a

$$2A' - A = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 - 4ab) = \text{const.},$$

quel que soit le point (α, β);

4° La somme des aires des podaires des quatre sommets d'une ellipse est égale à six fois l'aire de la podaire du centre.

II. — Application a la parabole et a ses podaires du sommet.

Il est facile de démontrer que l'équation de la parabole étant

$$y^2 = 2px,$$

celle de sa première podaire du sommet est

$$y^2 = -\frac{2x^3}{2x - p}.$$

C'est l'équation d'une cissoïde de Dioclès ayant pour asymptote la directrice de la parabole. Cette cissoïde est en même temps la transformée par rayons vecteurs réciproques de la parabole.

Si l'on prend le sommet de la parabole pour pôle et pour axe polaire l'axe de la parabole, cette parabole a pour équation

$$r = 2p\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

L'aire de la cissoïde comprise entre la courbe et son asymptote est finie et a pour expression $\frac{3\pi p^2}{16}$.

La seconde podaire du sommet de la parabole ou première podaire de la cissoïde est une courbe fermée ayant pour aire

$$U_2 = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{p}{4}\right)^2.$$

On trouve aussi pour la troisième podaire de la parabole ou deuxième de la cissoïde

$$U_3 = \frac{1}{216}\pi\left(\frac{p}{4}\right)^2.$$

Ces aires deviennent de plus en plus petites et tendent à se rapprocher de zéro.

Première anti-podaire de la parabole. — Cherchons directement l'équation de cette anti-podaire qui est une courbe à branches infinies et dont l'aire ne présente aucun intérêt.

M étant un point de la parabole et O son sommet, il suffit de chercher l'enveloppe de la droite perpendiculaire en M à MO pour avoir l'équation de l'anti-podaire.

Si y est l'ordonnée du point M, l'équation de la perpendiculaire en M à MO est

$$Y - y = -\frac{y}{2p}\left(X - \frac{y^2}{2p}\right).$$

Cette équation ordonnée par rapport à y peut s'écrire

$$y^3 - 2p(2p - X)y - 4p^2 Y = 0.$$

Si nous exprimons que cette équation en y a une racine double, nous avons immédiatement pour l'équation de l'enveloppe

$$Y^2 = \frac{2(X - 2p)^3}{27p}.$$

C'est une courbe de forme analogue à la développée de la parabole.

Les autres courbes anti-podaires de la parabole ou podaires de développées n'offrent rien d'intéressant.

(*A suivre.*)

THÉORIE GÉNÉRALE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET DU PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN DES NOMBRES COMMENSURABLES [1];

PAR M. P. BARRIEU,
Professeur au lycée de Périgueux.

APPLICATIONS. PRODUITS. ÉLÉVATIONS AUX PUISSANCES. TRANSFORMATIONS.

Produits. — Pour simplifier le langage, au lieu de dire que $D(a, b, c, \ldots)$ est le plus grand commun diviseur des nombres $a, b, c, \ldots$, nous dirons qu'il est le plus grand commun diviseur de l'expression $(a, b, c, \ldots)$. De même, pour le plus petit commun multiple.

Nous appellerons produit de deux expressions

$$(a, b, c, \ldots) \times (a', b', c', \ldots),$$

le résultat obtenu en effectuant la multiplication comme si les virgules étaient des signes $+$, mais sans effectuer la réduction des termes semblables. Ainsi

$$(a, b) \times (c, d) = (ac, bc, ad, bd).$$
$$(a, b) \times (a, b) = (a^2, ab, ab, b^2).$$

Dans ces conditions, nous aurons le théorème suivant :

Le produit des plus grands communs diviseurs (ou des plus petits communs multiples) de deux expressions est égal au plus grand commun diviseur (ou au plus petit commun multiple) du produit de ces deux expressions.

---

[1] *Voir* même tome, p. 95.

En effet, on a successivement

$$\begin{aligned} D(a, b, c)\, D(a', b') &= D[a\, D(a', b'), b\, D(a', b'), c\, D(a', b')] \\ &= D[D(aa', bb'), D(ba', bb'), D(ca', cb')] \\ &= D(aa', bb', ba', bb', ca', cb') \\ &= D[(a, b, c)(a', b')]. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

On aurait de même

$$m(a, b, c)\, m(a', b') = m[(a, b, c)(a', b')].$$

Le théorème, démontré pour deux facteurs, s'étend, par le procédé ordinaire, à un nombre quelconque de facteurs.

Élévation aux puissances. — Nous désignerons par

$$D^n(a, b, c, \ldots), \quad m^n(a, b, c, \ldots)$$

les n^{iemes} puissances du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple des nombres $a, b, c, \ldots$.

Si l'on élève plusieurs nombres à la même puissance, tous leurs facteurs premiers sont élevés à cette puissance, donc leur plus grand commun diviseur et leur plus petit commun multiple sont aussi élevés à cette même puissance, et l'on a

$$\text{(XIII)} \qquad D^n(a, b, c, \ldots) = D(a^n, b^n, c^n, \ldots),$$

$$\text{(XIV)} \qquad m^n(a, b, c, \ldots) = m(a^n, b^n, c^n, \ldots).$$

D'après ce théorème, on a

$$D^3(a, b) = D(a^3, b^3).$$

Mais, d'après le théorème sur les produits, on a

$$\begin{aligned} D^3(a, b) &= D[(a, b)^3] \\ &= D(a^3, a^2 b, ab^2, b^3). \end{aligned}$$

On a donc

$$D(a^3, b^3) = D(a^3, a^2 b, ab^2, b^3).$$

Ce qui montre que, dans le développement de $(a, b)^3$,

les termes $a^2 b$ et ab^2 peuvent être négligés en présence des termes a^3, b^3.

D'une façon générale, dans le développement de $(a, b)^n$ tous les autres termes peuvent être négligés en présence de a^n, b^n qui doivent seuls rester.

On peut se rendre compte de ce fait par la considération des facteurs premiers, en observant que le développement de $(a, b, c, \ldots)^n$ est une fonction entière et homogène du degré n.

Transformations. — Nous allons donner un exemple des transformations que l'on peut opérer à l'aide du théorème III.

Exemple : Transformer le produit

$$\mathrm{D}(a, b)\,\mathrm{D}(a, c)\,\mathrm{D}(b, c).$$

En désignant ce produit par P_2, on a successivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_2 &= \mathrm{D}(a, b)\,\mathrm{D}(a, c)\,\mathrm{D}(b, c)\\
&= \mathrm{D}(a^2 b, ab^2, abc, b^2 c, a^2 c, abc, ac^2, bc^2)\\
&= \mathrm{D}(a^2 b, ab^2, abc, b^2 c, a^2 c, abc, ac^2, bc^2, abc)\\
&= \mathrm{D}[\mathrm{D}(a^2 b, ab^2, abc), \mathrm{D}(a^2 c, ac^2, abc), \mathrm{D}(b^2 c, bc^2, abc)]\\
&= \mathrm{D}[ab\,\mathrm{D}(a, b, c), ac\,\mathrm{D}(a, b, c), bc\,\mathrm{D}(a, b, c)]\\
&= \mathrm{D}(a, b, c)\,\mathrm{D}(ab, ac, bc).
\end{aligned}$$

Mais le corollaire III du théorème II donne

$$m(a, b, c)\,\mathrm{D}(ab, ac, bc) = abc.$$

On a donc

$$\mathrm{P}_2 = \frac{abc\,\mathrm{D}(a, b, c)}{m(a, b, c)}.$$

De cette formule, on tire

$$m(a, b, c) = \frac{abc\,\mathrm{D}(a, b, c)}{\mathrm{D}(a, b)\,\mathrm{D}(a, c)\,\mathrm{D}(b, c)},$$

formule qui répond à un cas particulier d'un théorème plus général que nous allons démontrer tout à l'heure.

Les propriétés du plus petit commun multiple étant les mêmes que celles du plus grand commun diviseur, les égalités précédentes subsisteront si l'on y permute les signes D et m. On a donc

$$D(a, b, c) = \frac{abc\, m(a, b, c)}{m(a, b)\, m(a, c)\, m(b, c)}.$$

Cet exemple suffira ici; nous donnerons à la fin de cette étude quelques exercices que le lecteur pourra résoudre.

II.

Définitions et notations nouvelles. — 1° Nous appellerons *produit alterné* de n facteurs un produit de la forme

$$A_1 \times A_2^{-1} \times A_3 \times A_4^{-1} \times \ldots \times A_n^{(-1)^{n+1}}.$$

2° Suivant l'usage adopté, nous désignerons par P_r le produit des plus grands communs diviseurs des groupes formés en combinant r à r les n nombres donnés a, b, c, ..., l. D'après cette notation, on a

$$P_2 = D(a, b)\, D(a, c) \ldots D(k, l).$$
$$P_3 = D(a, b, c)\, D(a, b, d) \ldots D(h, k, l),$$

et ainsi de suite jusqu'à $P_n = D(a, b, c, \ldots l)$.

Il y aurait pour P_1 une exception que nous lèverons en convenant de dire que le plus grand commun diviseur d'un nombre est ce nombre lui-même, de telle sorte que l'on aura : $D(a) = a$. Il y a là une extension de sens analogue à celle que l'on a introduite quand on a dit que la première puissance d'un nombre est ce nombre lui-même.

Avec cette convention, on aura

$$P_1 = D(a)\, D(b)\, D(c) \ldots D(l) = abc \ldots l = P.$$

Étendant les mêmes conventions au plus petit commun

multiple, nous désignerons par P'_r le produit des plus petits communs multiples des groupes formés en combinant r à r les nombres donnés.

3° Nous conviendrons de désigner par les notations

$$D(\Pi_r), \qquad m(\Pi_r)$$

le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple des divers produits que l'on obtient en combinant r à r les n nombres donnés.

D'après cette notation, on a

$$\begin{aligned} D(\pi_1) &= D(a, b, c, \ldots, l), \\ D(\pi_2) &= D(ab, ac, \ldots, kl), \\ D(\pi_3) &= D(abc, abd, \ldots, hkl), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

De même pour le plus petit commun multiple.

Théorème IV. — *Étant donnés n nombres entiers ou fractionnaires $a, b, c, \ldots, l$, on a*

$$\text{(XV)} \qquad m(a, b, c, \ldots, l) = P_1 P_2^{-1} P_3 P_4^{-1} \ldots P_n^{(-1)^{n+1}},$$

$$\text{(XVI)} \qquad D(a, b, c, \ldots, l) = P'_1 P'^{-1}_2 P'_3 P'^{-1}_4 \ldots P'^{(-1)^{n-1}}_n.$$

1° Proposons-nous de démontrer la formule (XV), dans laquelle le second membre est le produit alterné des plus grands communs diviseurs des groupes formés en combinant successivement 1 à 1, 2 à 2, ..., n à n, les nombres donnés.

Considérons un facteur premier quelconque p arbitrairement choisi, et désignons par

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_i, \quad a_{i+1}, \quad \ldots, \quad a_n$$

les nombres donnés disposés dans un ordre tel que les exposants

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_i, \quad \alpha_{i+1}, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

dont le facteur p est affecté dans ces nombres, se trouvent rangés par ordre de *grandeur croissante*.

Cela fait, cherchons d'abord l'exposant e_i dont le facteur p est affecté dans le produit alterné des plus grands communs diviseurs des groupes qui commencent par a_i.

Pour cela, remarquons que les plus grands communs diviseurs des groupes qui commencent par a_i renferment tous le facteur premier p avec l'*exposant minimum* α_i; de telle sorte que la question se trouve ramenée à chercher combien il y a de groupes commençant par a_i dans chacun des facteurs $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$.

Or, dans P_r où tous les groupes sont composés de r termes, le nombre des groupes commençant par a_i est évidemment égal au nombre des combinaisons que l'on peut former en prenant $r-1$ à $r-1$ les $n-i$ nombres qui suivent a_i, c'est-à-dire égal à C_{n-i}^{r-1}.

Ainsi donc, le nombre des groupes qui commencent par a_i est

$$\begin{array}{lcl} 1 & \text{dans} & P_1, \\ C_{n-i}^1 & \text{»} & P_2, \\ C_{n-i}^2 & \text{»} & P_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ C_{n-i}^{n-i} & \text{»} & P_{n-i+1}, \\ 0 & \text{»} & P_{n-i+2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots, \\ 0 & \ldots & P_n. \end{array}$$

L'exposant de p dans le produit alterné des plus grands communs diviseurs des groupes qui commencent par a_i est donc :

$$(1) \qquad e_i = \alpha_i(1 - C_{n-i}^1 + C_{n-i}^2 - C_{n-i}^3 + \ldots \pm C_{n-i}^{n-i}).$$

Mais, pour avoir l'exposant e du facteur p dans le produit alterné $P_1 P_2^{-1} P_3 P_4^{-1} \ldots P_n^{(-1)^{n-1}}$, il suffit de faire la

somme des valeurs que prend e_i quand on attribue successivement à i les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$; on a donc

$$(2) \qquad e = \sum_{i=1}^{i=n} e_i.$$

Or, dans l'égalité (1), le coefficient de α_i est la somme alternée des coefficients du binome et l'on sait que cette somme est toujours nulle.

Le coefficient de α_i dans l'égalité (1) est donc nul quand on attribue à i les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$, tandis que ce coefficient prend la valeur 1 pour $i = n$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{i=n} e_i = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + \ldots + 0\alpha_{n-1} + 1\alpha_n$$
$$= \alpha_n.$$

Donc

$$e = \alpha_n.$$

Le facteur p entre donc dans le produit alterné $P_1 P_2^{-1} P_3 P_4^{-1} \ldots P_n^{(-1)^{n+1}}$ avec l'exposant α_n; mais α_n est précisément l'exposant *maximum* de p dans les nombres donnés; c'est donc aussi l'exposant avec lequel p entre dans $m(a, b, c, \ldots, l)$, et l'on a

$$m(a, b, c, \ldots, l) = P_1 P_2^{-1} P_3 P_4^{-1} \ldots P_n^{(-1)^{n-1}} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° La démonstration de la formule (XVI) se ferait absolument de la même manière, en disposant les nombres dans un ordre tel que les exposants de p aillent en *décroissant*, et en substituant l'exposant *maximum* à l'exposant minimum.

On peut d'ailleurs déduire la formule (XVI) de la formule (XV) au moyen des formules de corrélation.

En effet, appliquons la formule (XV) aux nombres $\frac{1}{a}$,

$\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}$. Nous aurons

$$(1) \qquad m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = P_1 P_2^{-1} P_3 P_4^{-1} \ldots P_n^{(-1)^{n+1}}.$$

Mais

$$m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{D(a, b, c, \ldots, l)}.$$

D'autre part, P_r est un produit de facteurs de la forme

$$D\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots\right),$$

mais

$$D\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots\right) = \frac{1}{m(a, b, c, \ldots)}.$$

On a donc

$$P_r = \frac{1}{P'_r} = P'^{-1}_r,$$

et la formule (1) devient

$$\frac{1}{D(a, b, c, \ldots, l)} = P'^{-1}_1 P'_2 P'^{-1}_3 P'_4 \ldots P'^{(-1)^n}_n,$$

d'où

$$D(a, b, c, \ldots, l) = P'_1 P'^{-1}_2 P'_3 P'^{-1}_4 \ldots P'^{(-1)^{n+1}}_n \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Le théorème IV était déjà connu pour les nombres entiers; nous l'avons étendu aux nombres fractionnaires et nous en avons donné une démonstration nouvelle. L'introduction des produits alternés nous a permis d'en préciser l'énoncé. Ce théorème n'est d'ailleurs qu'un corollaire d'un théorème plus général qui n'avait pas encore été formulé et par lequel nous allons terminer cette étude.

Théorème V. — *Étant donnés n nombres, entiers ou fractionnaires, $a, b, c, \ldots, l$; si l'on désigne par ω_1, ω_2, ω_3, ... les nombres figurés successifs de l'ordre*

$r-1$, on a

$$\text{(XVII)} \quad P_{r+1} = D^{\omega_1}(\pi_{n-r})\, D^{\omega_2}(\pi_{n-r-1})\, D^{\omega_3}(\pi_{n-r-2}) \ldots D^{\omega_{n-r}}(\pi_1),$$

$$\text{(XVIII)} \quad P'_{r+1} = m^{\omega_1}(\pi_{n-r})\, m^{\omega_2}(\pi_{n-r-1})\, m^{\omega_3}(\pi_{n-r-2}) \ldots m^{\omega_{n-r}}(\pi_1).$$

1° Établissons d'abord la formule (XVII), et, pour plus de précision, supposons $r = 3$. On verra bien d'ailleurs que le raisonnement est tout à fait général et s'applique à une valeur quelconque de r.

La formule à démontrer devient alors

$$P_4 = D^{\omega_1}(\pi_{n-3})\, D^{\omega_2}(\pi_{n-4})\, D^{\omega_3}(\pi_{n-5}) \ldots D^{\omega_{n-3}}(\pi_1),$$

et ω_1, ω_2, ω_3, ... représentent les nombres figurés successifs du deuxième ordre.

Cela posé, considérons un facteur premier quelconque p et désignons par

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n$$

les nombres donnés disposés dans un ordre tel que les exposants

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

dont le facteur p est affecté dans ces nombres, soient rangés par ordre de grandeur *décroissante*, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \qquad \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_n.$$

Le facteur p entrera dans le produit

$$D^{\omega_1}(\pi_{n-3})\, D^{\omega_2}(\pi_{n-4})\, D^{\omega_3}(\pi_{n-5})\, D^{\omega_4}(\pi_{n-6}) \ldots D^{\omega_{n-3}}(\pi_1)$$

avec un exposant de la forme

$$e = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + s_3\alpha_3 + \ldots + s_i\alpha_i + \ldots + s_n\alpha_n,$$

et dans le produit P_4 avec un exposant de la forme

$$e' = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3 + \ldots + t_i\alpha_i + \ldots + t_n\alpha_n,$$

et tout revient à démontrer que $e = e'$.

Pour cela il suffit de démontrer d'une façon générale que $s_i = t_i$.

Occupons-nous d'abord de e. On voit immédiatement que l'exposant de p dans le plus grand commun diviseur $D(\pi_k)$ des produits obtenus en combinant les nombres k à k n'est autre que l'exposant de p dans le produit fourni par la dernière combinaison, puisque, en vertu de l'inégalité (1), ce produit est celui où la somme des exposants de p est la plus faible.

L'exposant de p sera donc :

Dans

$$D(\pi_{n-1})\ldots \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 - \ldots - \alpha_n,$$
$$D(\pi_{n-2})\ldots \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 - \ldots - \alpha_n.$$

Dans

$$\begin{array}{ll}
D(\pi_{n-3})\ldots & \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \ldots - \alpha_n, \\
D(\pi_{n-4})\ldots & \alpha_5 - \alpha_6 - \ldots - \alpha_n, \\
D(\pi_{n-5})\ldots & \alpha_6 - \ldots + \alpha_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots; \\
D(\pi_1)\ldots & \alpha_n.
\end{array}$$

Il résulte de ce Tableau que les exposants α_1, α_2, α_3 n'entreront pas dans le produit

$$D^{\omega_1}(\pi_{n-3})\, D^{\omega_2}(\pi_{n-4})\, D^{\omega_3}(\pi_{n-5})\, D^{\omega_4}(\pi_{n-6})\ldots D^{\omega_{n-3}}(\pi_1).$$

L'exposant α_4 y entrera avec le coefficient ω_1 qui est l'exposant de D dans $D^{\omega_1}(\pi_{n-3})$:

L'exposant α_5 y entrera avec le coefficient $\omega_1 + \omega_2$,

» α_6 » » $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$,

» α_7 » » $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$.

D'une façon générale, l'exposant α_i y entrera avec un coefficient égal à la somme des $(i-3)$ premiers nombres figurés du deuxième ordre ; ou, ce qui revient au même,

avec un exposant égal au $(i-3)^{\text{ième}}$ nombre figuré du troisième ordre.

Mais on sait que le $i^{\text{ième}}$ nombre figuré de l'ordre n est C^n_{n+i-1}. En remplaçant dans cette formule i par $i-3$ et n par 3, on voit que le $(i-3)^{\text{ième}}$ nombre figuré du troisième ordre est

$$C^3_{3+i-3-1} = C^3_{i-1}.$$

Le coefficient de α_i dans e est donc

$$(2) \qquad s_i = C^3_{i-1}.$$

Passons maintenant à l'exposant e' avec lequel le facteur premier p entre dans P_4, c'est-à-dire dans le produit des plus grands communs diviseurs des groupes obtenus en combinant quatre à quatre les n nombres donnés.

Pour cela, remarquons que les plus grands communs diviseurs des groupes qui se terminent par a_i renferment tous le facteur p avec l'exposant α_i qui est l'exposant minimum de p dans les nombres de chacun de ces groupes; tandis que les plus grands communs diviseurs des groupes qui ne se terminent pas par a_i contiennent p avec un exposant minimum qui est différent de α_i.

Le nombre des facteurs du produit P_4 dans lesquels le facteur premier p entrera avec l'exposant α_i est donc égal au nombre des groupes de quatre termes qui se terminent par a_i. Or ce nombre est évidemment égal au nombre des combinaisons que l'on peut former en prenant trois à trois les $(i-1)$ nombres qui précèdent a_i.

Le facteur p entrera donc avec l'exposant α_i dans C^3_{i-1} facteurs de P_4.

Le coefficient de α_i dans e' est donc

$$(3) \qquad t_i = C^3_{i-1}.$$

Mais nous avons déjà trouvé

$$(2) \qquad s_i = C^3_{i-1}.$$

Donc on a

$$s_i = t_i,$$

et le théorème est démontré.

On démontrerait de la même manière la formule (XVIII). On peut, d'ailleurs, la déduire de la formule (XVII), au moyen des formules de corrélation, en appliquant la formule (XVII) aux inverses $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}$, et en remarquant que le plus grand commun diviseur des inverses de n nombres est égal à l'inverse du plus plus petit multiple commun de ces nombres.

Corollaire. — En attribuant successivement à r les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$, la formule (XVII) donne

$$\begin{aligned}
P_2 &= D(\pi_{n-1})\, D(\pi_{n-2})\, D(\pi_{n-3})\, D(\pi_{n-4})\, D(\pi_{n-5})\ldots,\\
P_3 &= \qquad D(\pi_{n-2})\, D^2(\pi_{n-3})\, D^3(\pi_{n-4})\, D^4(\pi_{n-5})\ldots,\\
P_4 &= \qquad\qquad D(\pi_{n-3})\, D^3(\pi_{n-4})\, D^6(\pi_{n-5})\ldots,\\
P_5 &= \qquad\qquad\qquad D(\pi_{n-4})\, D^4(\pi_{n-5})\ldots,\\
P_6 &= \qquad\qquad\qquad\qquad D(\pi_{n-5})\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
P_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad D(\pi_1),
\end{aligned}$$

d'où, en faisant, membre à membre, le produit alterné

$$(1) \qquad P_2 P_3^{-1} P_4 P_5^{-1} \ldots P_n^{(-1)^n} = D(\pi_{n-1}).$$

Mais on sait que

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned}
m(a,b,c,\ldots,l) &= \frac{P}{D\left(\frac{P}{a}, \frac{P}{b}, \frac{P}{c}, \ldots, \frac{P}{l}\right)}\\
&= \frac{P}{D(\pi_{n-1})}\\
&= \frac{P_1}{D(\pi_{n-1})}.
\end{aligned} \right.$$

On a donc

$$m(a,b,c\ldots,l) = P_1 P_2^{-1} P_3 P_4^{-1} \ldots P_n^{(-1)^{n+1}},$$

et l'on retrouve ainsi la formule du théorème IV.

III.

NOTE SUR LES CODIVISEURS ET LES COMULTIPLES DES NOMBRES IRRATIONNELS.

Étant donnés n nombres irrationnels, ou n nombres dont quelques-uns sont irrationnels, nous supposerons toujours que tous ces nombres ont été réduits au même indice.

Décomposition d'un nombre irrationnel en facteurs premiers. — Tout nombre réel irrationnel est un produit de facteurs premiers affectés d'exposants entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs. Ainsi

$$\sqrt[3]{360} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^2 \times 5} = 2 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{28}{45}} = \sqrt[3]{2^2 \times 3^{-2} \times 5^{-1} \times 7} = 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}}.$$

Multiples. — En conservant le sens attribué au mot *multiple* pour les nombres commensurables, nous dirons qu'un nombre irrationnel est multiple d'un autre quand il est égal au produit de cet autre par un nombre entier.

Ainsi $\sqrt[3]{144}$ est un multiple de $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, car

$$\sqrt[3]{144} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \times 6.$$

Lemme. — *Pour qu'un nombre irrationnel $\sqrt[q]{A}$ soit divisible par un nombre irrationnel $\sqrt[q]{B}$, il faut et il suffit que chaque facteur premier entre dans A avec un*

exposant supérieur ou égal à celui qu'il a dans B, *et que la différence de ces exposants soit un multiple de l'indice* q.

En effet, soit p un facteur premier quelconque, et soient α et β les exposants *entiers*, positifs, négatifs ou nuls avec lesquels ce facteur entre dans les nombres positifs commensurables A et B. Le facteur p entrera dans le quotient $\sqrt[q]{A} : \sqrt[q]{B}$ avec l'exposant $\frac{\alpha - \beta}{q}$. Donc, pour que ce quotient soit un nombre entier, il faut et il suffit que l'exposant $\frac{\alpha - \beta}{q}$ soit un nombre entier, positif ou nul, ou, en d'autres termes, que α soit supérieur ou égal à β, et que la différence $\alpha - \beta$ soit un multiple de q.

C. Q. F. D.

Corollaire. — Condition pour que n nombres irrationnels

$$\sqrt[q]{a},\ \sqrt[q]{b},\ \sqrt[q]{c},\ \ldots\ \sqrt[q]{l}$$

aient un codiviseur ou un comultiple.

Soit p un facteur premier quelconque, et soient

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n$$

les exposants *entiers*, positifs, négatifs ou nuls, rangés par *ordre de grandeur croissante*, dont le facteur p est affecté dans les nombres positifs commensurables

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ l.$$

Considérons maintenant un nombre irrationnel $\sqrt[q]{X}$, et désignons par x l'exposant *entier*, positif, négatif ou nul avec lequel le facteur p entre dans le nombre positif commensurable X.

Pour que $\sqrt[q]{X}$ soit un codiviseur des nombres irrationnels donnés, il faut et il suffit, d'après le lemme,

que l'on ait

1° $$x \leqq \alpha_1,$$

2° $$x \equiv \alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \ldots \equiv \alpha_n \pmod{q}.$$

La dernière condition exige que les exposants, avec lesquels un facteur premier quelconque p entre dans les nombres placés sous le signe $\sqrt{}$, soient congrus entre eux, par rapport à l'indice, ce qui n'arrivera que dans des cas tout à fait exceptionnels.

On peut donc dire que, *généralement, n* nombres irrationnels n'ont pas de codiviseur. On verrait de même que *généralement,* ils n'ont pas de comultiple.

Toutefois, lorsque la condition de congruence est remplie par les exposants de chacun des facteurs premiers qui entrent dans la composition des nombres placés sous le signe $\sqrt{}$, les conditions pour que $\sqrt[q]{X}$ soit un codiviseur des nombres

$$\sqrt[q]{a},\quad \sqrt[q]{b},\quad \sqrt[q]{c},\quad \ldots\ldots\quad \sqrt[q]{l},$$

se réduisent aux suivantes

1° $$x \leqq \alpha_1,$$

2° $$x \equiv \alpha_1 \pmod{q}.$$

Ces conditions étant satisfaites, le codiviseur $\sqrt[q]{X}$ aura sa valeur *maxima* lorsque x sera égal à α_1, c'est-à-dire quand on aura $\frac{x}{q} = \frac{\alpha_1}{q}$.

Il résulte de là que, lorsque les exposants satisferont à la condition de congruence, on formera le plus grand commun diviseur de n nombres irrationnels *en formant le produit de tous les facteurs premiers qui entrent dans ces nombres et en affectant chacun de ces facteurs de son plus faible exposant.*

Dans le même cas, on formera le plus petit commun multiple *en faisant le produit de tous les facteurs premiers et en affectant chacun d'eux de son plus fort exposant.*

Ainsi donc, dans ce cas, la loi de formation du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple est la même pour les nombres irrationnels et pour les nombres commensurables, d'où il résulte que les propriétés sont aussi les mêmes. Mais, *avant d'appliquer ces propriétés aux nombres irrationnels, il faudra toujours s'assurer que les exposants, dont chaque facteur premier est affecté dans les nombres placés sous le signe* $\sqrt{}$, *sont congrus entre eux par rapport à l'indice.*

On peut lever cette restriction en élargissant le sens donné au mot *multiple.*

Au lieu de dire qu'un nombre est multiple d'un autre quand il est égal au produit de cet autre par un nombre entier, il suffirait de dire qu'un nombre est multiple d'un autre quand il est égal à cet autre multiplié par un produit de facteurs premiers affectés d'exposants positifs.

Cette nouvelle définition est acceptable, car, appliquée aux nombres commensurables, elle conduit à l'ancienne qu'elle renferme ainsi comme cas particulier.

En effet, si un nombre commensurable A est égal à un nombre commensurable B multiplié par un produit C composé de facteurs premiers affectés d'exposants positifs, ces exposants sont nécessairement *entiers*, car chacun d'eux est égal à la différence des deux exposants *entiers* avec lesquels un même facteur premier entre dans les nombres commensurables A et B. Le produit C est donc un nombre entier. C. Q. F. D.

Si l'on accepte cette nouvelle définition du mot *multiple,* on voit, en se reportant à la démonstration du lemme, que, pour que $\sqrt[q]{A}$ soit divisible par $\sqrt[q]{B}$, il faut et il suffit que l'exposant $\frac{\alpha - \beta}{q}$ soit positif ou nul, ou, ce qui revient au même, que $\frac{\alpha}{q}$ soit supérieur ou égal à $\frac{\beta}{q}$.

Donc, avec la nouvelle définition, pour que $\sqrt[q]{A}$ soit divisible par $\sqrt[q]{B}$, il faut et il suffit que chaque facteur premier entre dans $\sqrt[q]{A}$ avec un exposant supérieur ou égal à celui qu'il a dans $\sqrt[q]{B}$.

La condition de la divisibilité d'un nombre par un autre est alors la même pour les nombres commensurables et pour les nombres irrationnels, et l'on a le lemme général :

Lemme. — *Pour qu'un nombre, commensurable ou irrationnel, soit divisible par un autre nombre, commensurable ou irrationnel, il faut et il suffit que chaque facteur premier entre dans le premier nombre avec un exposant supérieur ou égal à celui qu'il a dans le second.*

Le lemme étant ainsi généralisé, toutes les propriétés qui en découlent le sont aussi du même coup et s'appliquent aussi bien aux nombres irrationnels qu'aux nombres commensurables. Il faut en excepter toutefois celles qui exigent que les quotients obtenus en divisant des nombres par leur plus grand commun diviseur (ou un plus petit commun multiple par les nombres) soient des nombres entiers. Tel est le cas du deuxième corollaire du théorème II.

On remarquera que la loi de formation déduite du

lemme, donne pour les nombres irrationnels

$$D(\sqrt[q]{a}, \sqrt[q]{b}, \ldots, \sqrt[q]{l}) = \sqrt[q]{D(a, b, \ldots, l)},$$
$$m(\sqrt[q]{a}, \sqrt[q]{b}, \ldots, \sqrt[q]{l}) = \sqrt[q]{m(a, b, \ldots, l)}.$$

EXERCICES.

Dans tous ces exercices, les lettres $a, b, c, \ldots, l$ représentent des nombres quelconques entiers ou fractionnaires. Quelques-unes des identités proposées deviendraient immédiatement évidentes si les nombres étaient entiers.

Exercice I. — Dans les formules du théorème II, on peut permuter deux lettres de même indice, A_2 et B_2 par exemple, et écrire

$$D(A_1, B_2, A_3, \ldots, A_n).m(B_1, A_2, B_3, \ldots, B_n) = C.$$

Exercice II. — Si l'on a

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 = \ldots = A_n B_n,$$

on a

$$\begin{aligned} &D(A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n) \\ &\times m(A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n) \\ &= D(A_1, A_2, \ldots, A_n).m(B_1, B_2, \ldots, B_n). \end{aligned}$$

Exercice III. — Si l'on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots = \frac{l}{l'},$$

on a

$$\frac{D(a, b, c', \ldots, l)}{D(a', b', c', \ldots, l')} = \frac{m(a, b, c, \ldots, l)}{m(a', b', c', \ldots, l')} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \ldots.$$

Exercice IV. — Si les nombres a, b, c, d forment une proportion, les nombres $D(a, b)$, $m(a, b)$, $D(c, d)$, $m(c, d)$, forment aussi une proportion.

Exercice V. — Si les nombres a, b, c, $\ldots$, l sont en progression géométrique, on a

$$D(a, b, c, \ldots, l).m(a, b, c, \ldots, l) = al.$$

Exercice VI. — On a

$$D(1, a, a^2) = D^2(1, a).$$

En généralisant, on a

$$D(1, a, a^2, \ldots, a^n) = D^n(1, a);$$

on a de même

$$m(1, a, a^2, \ldots, a^n) = m^n(1, a).$$

Exercice VII. — Si les trois côtés et les trois hauteurs d'un triangle ont une commune mesure, on a

$$S = \frac{1}{2} D(a, b, c).m(h, h', h'').$$

Exercice VIII. — On a

$$D\left(1, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right) = \frac{D(a, b)}{m(a, b)},$$

$$m\left(1, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right) = \frac{m(a, b)}{D(a, b)}.$$

Exercice IX. — On a

$$\frac{D(a, b, c)}{m(a, b, c)} = D\left[\frac{D(a, b)}{m(a, b)}, \frac{D(a, c)}{m(a, c)}, \frac{D(b, c)}{m(b, c)}\right],$$

$$\frac{m(a, b, c)}{D(a, b, c)} = m\left[\frac{m(a, b)}{D(a, b)}, \frac{m(a, c)}{D(a, c)} = \frac{m(b, c)}{D(b, c)}\right].$$

Exercice X. — En transformant

$$D(abc, abd, acd, bcd),$$

on obtient

$$D(abc, abd, acd, bcd) = D(a, b).D(c, d).D[m(a, b), m(c, d)].$$

En continuant les transformations, on arrive à la formule connue

$$m(a, b, c, d) = \frac{abcd}{D(abc, abd, acd, bcd)}.$$

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE [fin (¹)];

PAR M. LE CAPITAINE E. BARISIEN.

III. — APPLICATION AU CERCLE ET A SES PODAIRES PAR RAPPORT A UN POINT DE LA CIRCONFÉRENCE DU CERCLE.

En prenant pour pôle le point de la circonférence et pour axe polaire le diamètre passant par le point, l'équation du cercle est

$$r = a\cos\theta,$$

a désignant le diamètre du cercle.

Nous avons donc

$$r' = -a\sin\theta, \qquad r'' = -a\cos\theta,$$

$$r^2 + r'^2 = a^2, \qquad r'^2 - rr'' = a^2, \qquad r^2 + 2r'^2 - rr'' = 2a^2.$$

Aire de la $m^{ième}$ podaire. — On trouve

$$\frac{dU_m}{d\theta} = \frac{a^2}{2}(m+1)\cos^{2m+2}\theta.$$

Donc

$$U_m = a^2(m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+2}\theta\, d\theta.$$

Or, on sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+2}\theta\, d\theta = \frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4.6\ldots(2m+2)}\frac{\pi}{2}.$$

Par suite

$$U_m = \frac{\pi a^2}{4}\,\frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4.6\ldots 2m}.$$

(¹) *Voir* même Tome, p. 207.

ou encore

$$U_m = \frac{\pi a^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2m}\right).$$

Donc

$$\text{(Cercle)}\quad U_0 = \frac{\pi a^2}{4},$$

$$\text{(Limaçon de Pascal)}\quad U_1 = \frac{3\pi a^2}{8},$$

$$U_2 = \frac{15\pi a^2}{32},$$

$$U_3 = \frac{35\pi a^2}{64},$$

$$U_4 = \frac{315\pi a^2}{512},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on veut avoir l'équation de la $m^{\text{ième}}$ podaire, il suffit d'éliminer θ entre les deux équations

$$\theta_m = (m+1)\theta,$$
$$r_m = a\cos^{m+1}\theta,$$

ce qui donne

$$r_m = a\cos^{m+1}\left(\frac{\theta_m}{m+1}\right).$$

Rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ podaire

$$R_m = \frac{a(m+1)}{m+2}\cos^m\theta.$$

On trouve par suite, pour la longueur de la développée de la $m^{\text{ième}}$ podaire,

$$S_m = 2a\,\frac{(m+1)}{m+2}\,(\cos^m\theta)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}},$$

c'est-à-dire

$$S_m = \frac{2a(m+1)}{m+2}.$$

Rectification de la m^{ieme} podaire. — On a

$$\frac{ds_m}{d\theta} = a(m+1)\cos^m\theta.$$

Donc

$$s_m = 2a(m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\theta\, d\theta.$$

Si m est pair, on aura

$$s_m = 2a(m+1)\,\frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m}\,\frac{\pi}{2}.$$

Si m est impair, on aura

$$s_m = 2a(m+1)\,\frac{2.4.6\ldots(m-1)}{1.3.5\ldots m}.$$

On a donc

(Cercle) $s_0 = \pi a,$

(Limaçon de Pascal) $s_1 = 4a,$

$$s_2 = \frac{3\pi a}{2},$$

$$s_3 = \frac{16a}{3},$$

$$s_4 = \frac{15\pi a}{8},$$

$$s_5 = \frac{32a}{5},$$

.....

Anti-podaires. — Pour la première anti-podaire, on trouve

$$\theta_{-1} = 0, \qquad U_{-1} = 0.$$

C'est qu'en effet la première anti-podaire se réduit alors à l'autre extrémité P_{-1} du diamètre passant par O.

La seconde anti-podaire donne

$$\theta_{-2} = -\theta, \qquad r_{-2} = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Son équation est par suite

$$r_{-2} = \frac{a}{\cos\theta_{-2}}.$$

Elle représente la droite tangente à l'extrémité P_{-1} du diamètre passant par O.

Pour la troisième anti-podaire, on a

$$\theta_{-3} = -2\theta, \qquad r_{-3} = \frac{a}{\cos^2\theta}.$$

Son équation est donc

$$r_{-3} = \frac{a}{\cos^2\frac{\theta_{-3}}{2}}.$$

Elle représente une parabole ayant pour sommet le point P_{-1} et pour foyer le point O. On sait, en effet, que le lieu des projections du foyer d'une parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet.

Les autres anti-podaires successives sont alors les anti-podaires du foyer de la parabole.

Aire de la podaire de la développée de la courbe. — La courbe primitive étant un cercle, sa développée n'est autre chose que le centre du cercle : par suite, la podaire de ce point est le lieu des projections du point sur les droites passant par le centre du cercle. Ce lieu est le cercle de rayon $\frac{a}{4}$ dont l'aire est

$$W_1 = \frac{\pi a^2}{16}.$$

Aire de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ podaire. — On a

$$\frac{dW_m}{d\theta} = \frac{a^2(m+1)}{2}\cos^2\theta\sin^{2m}\theta.$$

Donc

$$W_m = a^2(m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\theta \cos^2\theta\, d\theta,$$

c'est-à-dire

$$W_m = \frac{\pi a^2}{4}\,\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}.$$

Par conséquent

$$W_m = \frac{U_m}{2m+1}.$$

Rayon de courbure de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ *podaire.* — Nous n'avons pas donné de formule générale pour ce rayon de courbure $\mathcal{R}_m$, parce qu'elle serait trop compliquée. Dans le cas présent, nous avons

$$\rho_m = a \sin\theta \cos^m\theta.$$

Or on a

$$\mathcal{R}_m = \frac{(\rho_m^2 + \rho_m'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho_m^2 + 2\rho_m'^2 - \rho_m\rho_m''}.$$

En posant

$$\rho_m' = \frac{d\rho_m}{d\omega_m}, \qquad \rho_m'' = \frac{d^2\rho_m}{d\omega_m^2},$$

on a donc

$$\begin{aligned}\rho_m' &= a\cos^{m-1}\theta(\cos^2\theta - m\sin^2\theta)\frac{d\theta}{d\omega_m}\\ &= \frac{a}{m+1}\cos^{m-1}\theta(\cos^2\theta - m\sin^2\theta).\end{aligned}$$

On calculerait de même ρ_m''. On a enfin

$$\mathcal{R}_m = \frac{a\cos^{m-1}\theta}{m+1}\,\frac{(m^2\sin^2\theta + \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{m^2\sin^2\theta - m\sin^2\theta\cos 2\theta - \cos^2\theta(1+\cos^2\theta)}.$$

Longueur de la développée de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ *podaire.* — On a

$$S_m = 2(\mathcal{R}_m)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{m+1}.$$

IV. — Application a la lemniscate de Bernoulli et a ses podaires du centre.

L'équation cartésienne de la lemniscate de Bernoulli

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

devient en coordonnées polaires

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

On trouve pour l'aire U_0 de la courbe

$$U_0 = a^2.$$

Aire de la $m^{\text{ième}}$ podaire. — On trouve

$$U_m = 2a^2(m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} 2\theta\, d\theta = \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\, a^2.$$

Donc

$$U_0 = a^2,$$
$$U_1 = 2a^2,$$
$$U_2 = \frac{8a^2}{3},$$
$$U_3 = \frac{48a^2}{15},$$
$$U_4 = \frac{128a^2}{35},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'équation de la $m^{\text{ième}}$ podaire est

$$r_m^2 = a^2 \cos^{2m+1}\left(\frac{2\theta_m}{2m+1}\right).$$

Remarquons que l'aire U_m peut aussi s'écrire

$$U_m = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2m-1}\right)a^2.$$

Si donc on compare cette aire à l'aire analogue de

la $m^{\text{ième}}$ podaire du cercle (§ III), on a la propriété suivante :

Si l'on considère une lemniscate de centre O et dont l'un des sommets est en A, tel que $OA = a$, avec le cercle décrit sur AO comme diamètre, le produit des aires des $m^{\text{ièmes}}$ podaires relatives à la lemniscate et au cercle a pour expression

$$\frac{\pi a^4}{4}(2m+1).$$

On en déduit l'identité assez curieuse

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2m-1}\right)\left(1+\frac{1}{2m}\right)=2m+1$$

ou

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p}\right)=p+1.$$

Rayon de courbure de la podaire d'ordre m. — On a

$$R_m = \frac{a(2m+1)}{2m+3}\cos^{m-\frac{1}{2}}2\theta.$$

Longueur de la développée de la podaire d'ordre m. — On déduit de la formule précédente

$$S_m = \frac{4a(2m+1)}{2m+3}\left(\cos^{m-\frac{1}{2}}2\theta\right)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{4a(2m+1)}{2m+3}.$$

Pour $m = 0$, on obtient la longueur S_0 de la développée de la lemniscate

$$S_0 = \frac{4a}{3}.$$

Anti-podaires. — On trouve pour l'équation de cette anti-podaire

$$r_{-1} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta_{-1}}};$$

elle représente l'hyperbole équilatère ayant même arc réel en grandeur et en direction que celui de la lemniscate.

Toutes les autres anti-podaires sont par suite des courbes à branches infinies et ne présentent rien d'intéressant. Il en est de même des podaires des développées des anti-podaires.

Podaire de la développée de la lemniscate. — On trouve pour l'équation de cette podaire

$$\rho_1^2 = a^2 \sin^2 \frac{2\omega_1}{3} \cos \frac{2\omega_1}{3},$$

et pour son aire

$$W_m = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = a^2.$$

Podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ podaire. — On a pour l'aire de cette podaire

$$W_m = 2a^2(2m+1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\theta \cos^{2m-1} 2\theta \, d\theta,$$

$$W_m = a^2 \frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{1.3.5\ldots(2m-1)}.$$

Donc

$$W_m = \frac{U_m}{2m}.$$

Rayon de courbure de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ podaire de la lemniscate. — Sans donner l'expression de ce rayon de courbure, laquelle est assez compliquée, nous nous contenterons de donner la longueur de *la développée de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ podaire*

$$S_m = 4(\mathcal{R}_m)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{4a}{2m+1}.$$

V. — Application aux courbes de la famille

$$r^m = a^m \cos m\theta.$$

On a ici

$$r = a(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}},$$

$$r^2 + r'^2 = a^2(\cos m\theta)^{\frac{2}{m}-2},$$

$$r'^2 - rr'' = ma^2(\cos m\theta)^{\frac{2}{m}-2}.$$

Donc

$$\frac{dV}{d\theta} = m, \qquad \frac{d\theta_1}{d\theta} = m+1, \qquad \theta_1 = (m+1)\theta$$

et

$$r_1 = a(\cos m\theta)^{\frac{m+1}{m}}.$$

Podaires successives. — On déduit de là pour l'équation de la première podaire

$$r_1 = a\left(\cos\frac{m}{m+1}\theta_1\right)^{\frac{m+1}{m}}$$

ou

$$r_1^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \cos\frac{m}{m+1}\theta_1.$$

Cette équation représente une courbe de même famille que la courbe primitive; c'est ce qu'a démontré M. de Rhéville à l'article déjà cité (*Nouvelles Annales*, 1890, p. 143).

L'équation de la deuxième podaire sera de même

$$r_2^{\frac{m}{2m+1}} = a^{\frac{m}{2m+1}} \cos\frac{m}{2m+1}\theta_2$$

et en général celle de la $n^{\text{ième}}$ podaire

$$r_n^{\frac{m}{nm+1}} = a^{\frac{m}{nm+1}} \cos\frac{m}{nm+1}\theta_n.$$

Rayon de courbure des podaires. — On trouve pour le rayon de courbure de la première podaire

$$R_1 = a(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{m+1}{2m+1}\right)$$

ou

$$R_1 = r\,\frac{m+1}{2m+1}.$$

Or, le rayon de courbure de la courbe primitive a pour expression

$$R_0 = \frac{a}{m+1}(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}-1} = \frac{r}{(m+1)\cos m\theta} = \frac{r}{(m+1)\sin V}.$$

Donc, on a

$$r = (m+1)R_0 \sin V.$$

C'est, aux notations près, la formule de M. du Chatenet rappelée par M. de Rhéville à l'article précité.

Pour la $n^{\text{ième}}$ podaire, on trouve

$$R_n = \frac{r^{m(n-1)+1}}{a^{m(n-1)}}\left[\frac{mn+1}{m(n-1)+1}\right].$$

Anti-podaires. — On trouve pour l'équation de la première anti-podaire

$$r_{-1}^{\frac{m}{1-m}} = a^{\frac{m}{1-m}}\cos\frac{m}{1-m}\theta_{-1}$$

et pour celle de la $n^{\text{ième}}$ podaire

$$r_{-n}^{\frac{m}{1-mn}} = a^{\frac{m}{1-mn}}\cos\frac{m}{1-mn}\theta_{-n}.$$

Il est intéressant de voir dans quel cas l'une des podaires successives peut être une *transformée par rayons vecteurs réciproques* de la courbe donnée.

Il faut déterminer n de façon que

$$\frac{m}{mn+1} = -m;$$

d'où

$$n = -\frac{2}{m}.$$

Comme m doit être un nombre entier, il faut donc que m soit égal à ± 1, ± 2, ou à une fraction de l'unité. Dans ce cas la courbe aura parmi l'une de ses podaires ou anti-podaires sa propre transformée par rayons vecteurs réciproques.

Si $m = \pm 1$, on a $n = \mp 2$, l'une des courbes est un cercle et sa transformée est la droite qui est en même temps la seconde anti-podaire du cercle par rapport à un point de sa circonférence.

Si $m = \pm 2$, il en résulte $n = \mp 1$, et l'on obtient les mêmes courbes que précédemment.

Si $m = -\frac{1}{2}$, on a $n = 4$, ce qui veut dire que la courbe

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos\frac{\theta}{2}}}$$

a pour transformée par rayons vecteurs réciproques sa quatrième podaire.

Si $m = +\frac{1}{9}$, $n = -18$: c'est donc la dix-huitième anti-podaire qui est la transformée de la courbe

$$r = a\sqrt[9]{\cos\frac{\theta}{9}}.$$

Écrivons maintenant les équations des podaires et anti-podaires des courbes de la famille

$$r^m = a^m \cos m\theta,$$

dans les cas particuliers de $m = 1$ et $m = 2$: le premier cas correspond au cercle et le second à la lemniscate. Nous avons étudié ces deux cas particuliers en détail.

1° $m = 1$:

$$r_{-n} = \frac{a}{\left(\cos\frac{\theta_{-n}}{n-1}\right)^{(n-1)}},$$

.....

$$r_{-3} = \frac{a}{\cos^2\frac{\theta_{-3}}{2}} \qquad \text{(Parabole)},$$

$$r_{-2} = \frac{a}{\cos\theta_{-2}} \qquad \text{(Droite)},$$

$$\begin{cases} r_{-1} = a \\ \theta_{-1} = 0 \end{cases} \qquad \text{(Point)},$$

$$r = a\cos\theta \qquad \text{(Cercle)},$$

$$r_1 = a\cos^2\frac{\theta_1}{2} \qquad \text{(Limaçon de Pascal)},$$

$$r_2 = a\cos^3\frac{\theta_2}{3},$$

.....

$$r_n = a\left(\cos\frac{\theta_n}{n+1}\right)^{n+1};$$

2° $m = 2$:

$$r_{-n} = a\left(\cos\frac{2}{1-2n}\,\theta_{-n}\right)^{\frac{1-2n}{n}},$$

.....,

$$r_{-1} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta_{-1}}} \qquad \text{(Hyperbole équilatère)},$$

$$r = (\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(Lemniscate de Bernoulli)},$$

$$r_1 = a\left(\cos\frac{2\theta_1}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

.....,

$$r_n = a\left(\cos\frac{2}{2n+1}\,\theta_n\right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

Nos formules donnent lieu également à des applications intéressantes relatives à la cycloïde et aux développantes de cercle.

SUR UNE APPLICATION DE LA FORMULE DE MULTIPLICATION DES ARCS;

PAR M. E. GOURSAT.

1. La formule qui donne $\cos ma$ en fonction de $\cos a$ permet de déterminer tous les arcs, commensurables avec la circonférence, pour lesquels $\cos^2 a$ est égal à un nombre rationnel. On trouve par là même tous ceux de ces arcs dont une des lignes trigonométriques est commensurable.

La formule qui donne $\cos ma$ en fonction de $\cos a$, m étant un nombre entier positif, peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 2\cos ma = (2\cos a)^m - A_m^1(2\cos a)^{m-2} + A_m^2(2\cos a)^{m-4} \\ + (-1)^q A_m^q(2\cos a)^{m-2q} + \ldots; \end{aligned}\right.$$

le second membre est un polynome entier, de degré m par rapport à $2\cos a$, ne contenant que des termes dont le degré est de même parité que m, et tous les coefficients $A_m^1, A_m^2, \ldots, A_m^q, \ldots$ sont *des nombres entiers*. La loi se vérifie pour les premières valeurs de m

$$\begin{aligned} 2\cos 2a &= (2\cos a)^2 - 2, \\ 2\cos 3a &= (2\cos a)^3 - 3(2\cos a), \\ 2\cos 4a &= (2\cos a)^4 - 4(2\cos a)^2 + 2, \\ 2\cos 5a &= (2\cos a)^5 - 5(2\cos a)^3 + 5(2\cos a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

on démontre ensuite que la loi est générale à l'aide de la relation de récurrence

$$2\cos(m-1)a = 4\cos a\cos ma - 2\cos(m-1)a.$$

Cela posé, soit a un arc commensurable avec π, et $2p$

un nombre pair positif tel que $2pa$ soit un multiple de π. Remplaçons m par $2p$ dans la formule (1); on a $\cos 2pa = \pm 2$, et la formule (1) devient

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \pm 2 = (2\cos a)^{2p} - A^1_{2p}(2\cos a)^{2p-2} + \ldots \\ + (-1)^q A^q_m (2\cos a)^{2p-2q} + \ldots \end{aligned} \right.$$

ou, en posant

$$4\cos^2 a = x,$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = x^p - A^1_{2p} x^{p-1} + \ldots \\ + (-1)^q A^q_m x^{p-q} + \ldots \pm 2 = 0. \end{aligned} \right.$$

On voit donc que x est racine d'une équation algébrique à coefficients entiers, le premier coefficient étant égal à l'unité. Si cette équation admet une racine commensurable, on sait que cette racine est égale à un nombre entier. Comme x est compris entre 0 et 4, les seules valeurs admissibles sont 0, 1, 2, 3, 4 et, par conséquent, les seules valeurs possibles de $\cos a$ sont :

$$0, \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \pm 1.$$

On voit qu'en se bornant au premier quadrant les seuls arcs répondant à la question sont les arcs de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

2. La question peut être généralisée. Je dirai, pour abréger, qu'un nombre x est une irrationnelle algébrique d'ordre r, lorsque x est racine d'une équation algébrique entière d'ordre r, irréductible, à coefficients commensurables. Proposons-nous d'obtenir tous les arcs, commensurables avec la circonférence, dont une des lignes trigonométriques est une irrationnelle d'un ordre donné. Le problème sera évidemment résolu, si l'on a obtenu tous les arcs, commensurables avec π, pour lesquels le carré du cosinus est une irrationnelle d'un ordre r donné à l'avance.

Soient donc a un arc commensurable avec π, et $2p$ un nombre entier tel que $2pa$ soit un multiple de π. Le premier membre de l'équation (3) doit admettre un diviseur de degré r, à coefficients commensurables. S'il en est ainsi, on sait, d'après un théorème dû à Gauss, que $f(x)$ doit être le produit de deux polynomes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ à coefficients entiers, $\varphi(x)$ étant de degré r; comme le coefficient de x^p dans $f(x)$ est un, le coefficient de x^r dans $\varphi(x)$ doit aussi être égal à l'unité, et, par suite, x doit être racine d'une équation de degré r

$$\varphi(x) = x^r + Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + \ldots + L = 0,$$

dont tous les coefficients A, B, ..., L sont des nombres entiers. Comme toutes les racines de cette équation doivent être comprises entre 0 et 4, on a immédiatement une limite supérieure de chacun des coefficients A, B, C, ..., L. Il n'y a donc qu'un nombre *fini* d'arcs répondant à la question, en ne considérant pas comme distincts deux arcs qui diffèrent par un multiple de π.

Il résulte aussi de là qu'une irrationnelle donnée y ne peut être le cosinus d'un arc commensurable avec π que si $4y^2$ est racine d'une équation algébrique irréductible à coefficients entiers, le premier coefficient étant l'unité, ayant toutes ses racines positives et inférieures à 4. Par exemple, soit A un nombre rationnel, qui n'est pas égal au cube d'un autre nombre rationnel; $\sqrt[3]{A}$ ne peut pas être égal au cosinus d'un arc commensurable avec π.

Proposons-nous, pour donner une application, de trouver tous les arcs commensurables avec π, pour lesquels le carré du cosinus est une irrationnelle du second degré. D'après ce qu'on vient de voir, $x = 4\cos^2 a$ doit être racine d'une équation du second degré

$$x^2 - Ax + B = 0,$$

où A et B sont des nombres entiers positifs, ayant ses deux racines réelles et positives, et inférieures à 4, ce qui exige que l'on ait

$$A < 8, \quad B < 16, \quad A^2 - 4B > 0, \quad 16 + B > 4A.$$

En négligeant les équations qui admettent des racines entières, on ne trouve que quatre équations satisfaisant à ces conditions

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x^2 - 4x + 1 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 2 = 0, \quad x^2 - 5x + 5 = 0;$$

les seules valeurs possibles pour $\cos a$ sont donc les suivantes :

$$\cos a = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{4},$$

$$\cos a = \pm\sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}} = \frac{\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4},$$

$$\cos a = \frac{\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}{2},$$

$$\cos a = \frac{\pm\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Les arcs correspondants sont bien commensurables avec la circonférence. On a, en effet, en se bornant au premier quadrant,

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \qquad \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \qquad \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \qquad \cos\frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE EN 1894.

I. Par chaque point M d'un plan rapporté à des coordonnées rectangulaires Ox, Oy passent deux des hyperboles représentées par l'équation

$$(1) \qquad a^2xy + ay + x = 0,$$

où a est un paramètre variable. Sur quelle courbe (C) le point M doit-il se trouver pour que les deux hyperboles se coupent en ce point à angle droit?

En combien de points réels, à distance finie et distincts de l'origine, la courbe (C) rencontre-t-elle l'hyperbole définie par l'équation (1)?

Quelle relation doit-il exister entre a et b pour que les deux hyperboles définies par les équations

$$a^2xy + ay + x = 0, \qquad b^2xy + by + x = 0$$

se coupent à angle droit en un point autre que l'origine? Cette relation, si l'on y regarde a et b comme les coordonnées d'un point, définit une courbe; on construira cette courbe et l'on cherchera en combien de points réels, à distance finie et distincts de l'origine, elle rencontre la courbe (C).

II. Étant donnés trois nombres inégaux a, b, c, on considère les six points qui, rapportés à un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, ont respectivement pour coordonnées a, b, c; b, c, a; c, a, b; b, a, c; c, b, a; a, c, b. Démontrer que ces six points sont sur un cercle; former les équations du plan de ce cercle et du cône qui a ce même cercle pour directrice et l'origine des coordonnées pour sommet.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1895.

Mathématiques spéciales.

Première question. — On considère l'équation

$$(ax^2+bx+c)\frac{d^2y}{dx^2}+2(\lambda x+\mu)\frac{dy}{dx}+ky=0.$$

1° Les constantes *réelles* a, b, c, λ, μ étant données, on demande de prouver que l'on peut choisir la constante k, de manière que l'équation précédente soit vérifiée par un polynome $y=f(x)$ de degré donné n.

2° On suppose ensuite que le trinome

$$ax^2+bx+c$$

a ses racines a_0, a_1 *réelles* et *distinctes* et que, dans la décomposition de $\frac{\lambda x+\mu}{ax^2+bx+c}$ en fractions simples définie par l'identité

$$\frac{\lambda x+\mu}{ax^2+bx+c}=\frac{\alpha_0}{x-a_0}+\frac{\alpha_1}{x-a_1},$$

les coefficients α_0, α_1 sont *positifs* et différents de zéro.

Démontrer que, dans ces conditions, l'équation

$$f(x)=0$$

a toutes ses racines réelles et comprises entre a_0 et a_1.

On examinera si cette équation peut avoir des racines multiples.

Deuxième question. — On donne une courbe du troisième degré C_3 définie par les équations

$$x=6\lambda^2\mu,\qquad y=6\lambda\mu^2,\qquad z=\lambda^3+\mu^3,$$

où λ et μ désignent deux variables indépendantes que, pour abréger, nous appellerons les coordonnées du point a de la courbe C_3.

1° Trouver la relation qui doit lier les coordonnées de trois points a_1, a_2, a_3 de la courbe C_3 pour que ces points soient en ligne droite.

2° Trouver la relation qui doit lier les coordonnées de six points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 de cette courbe pour que ces points soient sur une conique.

Déduire de là la condition nécessaire et suffisante pour que, par trois points a_1, a_2, a_3 de la courbe C_3, on puisse faire passer une conique C_2, touchant C_3 aux points a_1, a_2, a_3.

Les côtés du triangle $a_1 a_2 a_3$ coupent C_3 en des points b_1, b_2, b_3, situés sur une droite D.

Les droites qui touchent la courbe C_3 aux points a_1, a_2, a_3 la coupent en des points c_1, c_2, c_3 situés sur une droite Δ.

La droite D étant donnée, quel est le nombre des coniques C_2 qui lui correspondent?

La droite Δ étant donnée, quel est le nombre des coniques C_2 qui lui correspondent?

NOTE SUR UNE FORMULE BIEN CONNUE DE LA GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE;

PAR M. B. KAGAN.

On sait bien que l'aire (Δ) d'un triangle rectiligne dans l'espace hyperbolique est proportionnelle à la différence $2d - (A + B + C)$, A, B, C étant les angles de ce triangle. Si l'on prend pour unité l'aire (δ) du triangle, dans lequel cette différence est égale à l'unité angulaire (ce qui est toujours possible, pourvu que celle-ci soit moindre que $2d$), on tire de cette relation l'équation fondamentale

$$\Delta = 2d - A - B - C, \tag{1}$$

qui ne dépend pas du choix de l'unité angulaire, parce que celle de surface lui est proportionnelle. Pour un

triangle, rectangle en C, cette formule devient

$$\Delta = d - A - B.$$

Si la cathète AC ($= b$) reste invariable, tandis que l'autre cathète AB ($= a$) augmente infiniment, $<$ B tend vers 0 et $<$ C vers $\Pi(b)$. Donc

$$(2) \qquad \lim \Delta = d - \Pi(b) \qquad (a = \infty).$$

Pour passer de la géométrie imaginaire à celle d'Euclide, il ne faut que poser

$$\Pi(x) = \text{constante} = d.$$

Donc la formule (2) nous donne pour l'espace euclidien

$$(2a) \qquad \lim \Delta = 0.$$

Or, on sait bien que cette limite est égale (dans ce cas-ci) à ∞. Il est clair que ce n'est qu'une contradiction apparente. Dans l'équation (1), Δ désigne la mesure de l'aire du triangle, c'est-à-dire son rapport à l'aire δ. En l'exprimant explicitement, on reçoit

$$(3) \qquad \frac{\Delta}{\delta} = 2d - A - B - C.$$

Dans l'espace euclidien, le triangle, dont l'aire est prise pour unité ci-dessus, n'existe pas; pour unité de surface y est adoptée la double aire ($2\delta'$) d'un triangle rectangle, dont les cathètes sont égales à l'unité de longueur. L'équation ($2a$) n'exprime que la proposition suivante : le rapport de l'aire d'un triangle rectangle, dont une des cathètes est constante et l'autre augmente infiniment, à celle d'un triangle (δ), pour lequel $2d - A - B - C$ est égal à l'unité angulaire, tend vers 0 avec la courbure de l'espace. La contradiction apparente ci-dessus interprétée convenablement conduit

à la conclusion, que le rapport $\left(\frac{\delta}{\delta'}\right)$ augmente infiniment, quand la courbure négative de l'espace tend vers zéro.

Il s'agit, en premier lieu, de constater analytiquement cette affirmation. En second lieu, nous allons présenter quelques considérations où la formule (2) trouve son application.

A, B et C étant les angles d'un triangle rectiligne dans l'espace de courbure constante négative, a, b et c les côtés opposés, on a

$$(4)\qquad \sin\Pi(a)(\cos A + \cos B\cos C) = \sin B\sin C.$$

D'autre part,

$$(5)\qquad \begin{cases} \sin\Pi(x+y) = \dfrac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}, \\ \cos\Pi(x+y) = \dfrac{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}. \end{cases}$$

En conséquence,

$$(6)\qquad \begin{cases} \sin\Pi(2x) = \dfrac{\sin^2\Pi(x)}{1+\cos^2\Pi(x)}, \\ \cos\Pi(2x) = \dfrac{2\cos\Pi(x)}{1+\cos^2\Pi(x)}; \end{cases}$$

d'où l'on tire sans peine

$$(7)\qquad \begin{cases} \sin\Pi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{2\sin\Pi(x)}{1+\sin\Pi(x)}}, \\ \operatorname{tang}\Pi(x) = \sqrt{\dfrac{2\sin\Pi(x)}{1-\sin\Pi(x)}}, \end{cases}$$

où le radical doit être compté positif pour les valeurs positives de l'argument x.

En combinant les formules (4) et (7), on reçoit

$$\operatorname{tang}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin B\sin C}{\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}}},$$

$$\sin\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin B\sin C}{\cos\frac{A-C-B}{2}\cos\frac{C+B-A}{2}}},$$

ou bien, en vertu de la relation (3),

$$\operatorname{tang}\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin B\sin C}{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)\sin\left(A+\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)}},$$

$$\sin\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin B\sin C}{\sin\left(B+\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)\sin\left(C+\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)}}.$$

Ces formules, combinées avec celles que l'on en tire par analogie, nous donnent

$$\sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)}{\sin C}.$$

Or, h_a désignant la hauteur AD du triangle ABC, abaissée du sommet A, on tire du triangle rectangle ADC,

$$\sin C=\cot\Pi(h_a)\operatorname{tang}\Pi(b).$$

Après la substitution de cette expression, la formule précédente devient

$$\sin\Pi\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)=\sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{a}{b}\right)\operatorname{tang}\Pi(b)\cot\Pi(h_a).$$

Or, une simple combinaison des formules (7) donne

$$(8)\qquad \cot\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\operatorname{tang}\Pi(b)=\frac{1}{2}\sin\Pi\left(\frac{b}{2}\right),$$

et l'on reçoit finalement

$$(9)\qquad \sin\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right) = \frac{1}{2}\sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)\sin\Pi\left(\frac{b}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\cot\Pi(h_a).$$

Dans le cas où le triangle est rectangle en C,

$$h_a = b;$$

si on le substitue dans l'équation (9) et que l'on y applique de nouveau la relation (8), on reçoit

$$\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right) = \sin\Pi\left(\frac{c}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{b}{2}\right).$$

En particulier,

$$(10)\qquad \sin\left(\frac{1}{2}\frac{\delta'}{\delta}\right) = \sin\Pi\left(\frac{c'}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{1}{2}\right)\cot\Pi\left(\frac{1}{2}\right),$$

où c' désigne l'hypoténuse du triangle rectangle équilatère, dont les cathètes sont égales à l'unité de longueur.

Comme il en a été déjà fait mention, les équations (1) et (3) ne dépendent que du choix de l'unité angulaire. On peut donc la choisir de telle manière que $2d = \pi$, ce qui revient à mesurer l'angle par le rapport de l'arc correspondant à son rayon géodésique sur la sphère limite. Alors il est permis de substituer en (9) et (10), au lieu de $\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)$, l'argument $\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta}\right)$, celui-ci devenant infiniment petit. Si la courbure $-\frac{1}{l^2}$ de l'espace tend vers 0, les côtés a, b, c du triangle restant finis, les rapports $\frac{a}{l}$, $\frac{b}{l}$, $\frac{c}{l}$ deviennent infiniment petits. Comme il est permis, dans ce cas, de substituer au lieu de

$\sin \Pi(a)$, $\operatorname{tang} \Pi(a)$, ..., 1 et $\frac{a}{l}$, ..., en négligeant les infiniment petits des ordres supérieurs, on voit (9), (10) que les rapports $\frac{\Delta}{\delta}$ et $\frac{\delta'}{\delta}$ tendent aussi vers 0. Donc les équations (9) et (10) deviennent

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{2} \frac{a}{l} \frac{h_a}{l}, \tag{11}$$

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{2} \frac{1}{l} \frac{1}{l}. \tag{12}$$

En divisant ces équations l'une par l'autre, on reçoit la formule euclidienne

$$\lim \frac{\Delta}{2\delta'} = \frac{1}{2} \frac{a}{1} \frac{h_a}{1} \qquad (l = \infty).$$

En outre, l'équation (12) prouve que

$$\lim \frac{\delta'}{\delta} = 0 \qquad (l = \infty). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il est évident que le sens de cette proposition est purement analytique. C'est seulement dans le cas où on l'applique à des ensembles, dans lesquels on peut passer de l'un à l'autre en conservant la même unité de longueur, qu'elle admet une interprétation réelle.

La circonférence (C) et l'aire (K) du cercle s'expriment dans la géométrie imaginaire par les formules suivantes

$$C = 2\pi \cot \Pi(r), \tag{13}$$

$$K = 4\pi \cot^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right). \tag{14}$$

Donc, pour la surface (σ) d'un secteur, dont l'arc a la

longueur s, on a l'expression suivante :

$$\sigma = \frac{s\,\mathrm{K}}{\mathrm{C}} = \frac{2\,s\cot^2\Pi\left(\frac{r}{2}\right)}{l\cot\Pi(r)}$$

ou bien, en la transformant au moyen de la formule (8),

$$\sigma = \frac{s}{l}\cos\Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

En désignant par $2\,\Delta$ l'aire du triangle qui est formé par les deux rayons extrêmes et la corde (2λ) du secteur, et par τ celle du segment, on reçoit

$$\tau = \frac{s}{l}\cos\Pi\left(\frac{r}{2}\right) - 2\,\Delta.$$

Si le rayon du cercle augmente infiniment, l'arc (s) s'approche de l'arc (s') du cercle limite, qui correspond à la corde (2λ). Or

$$s' = 2\,l\cot\Pi(\lambda);$$

donc

$$\lim\left[\frac{s}{l}\cos\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\right] = 2\cot\Pi(\lambda) \qquad (r = \infty).$$

D'autre part, selon la formule (2),

$$\lim(2\,\Delta) = \pi - 2\,\Pi(\lambda) \qquad (r = \infty).$$

La démonstration de la formule (14) suppose, essentiellement, que les arcs du cercle sont mesurés par leur rapport à leur rayon géodésique, ce qui nous oblige d'exprimer $2\,d$ par π. En conséquence,

$$\tau' = \lim\tau_{(r=\infty)} = 2\cot\Pi(\lambda) + 2\,\Pi(\lambda) - \pi,$$

τ' désignant l'aire du segment d'un cercle limite, dont la corde est égale à 2λ.

Comme la mesure de cette surface est toujours positive, on a

$$(15) \qquad 2\cot\Pi(\lambda) + 2\pi(\lambda) > \Pi \qquad (\lambda > 0).$$

Or

$$\cot\Pi(\lambda) = \frac{e^{\frac{\lambda}{l}} - e^{-\frac{\lambda}{l}}}{2}, \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{l}}.$$

En substituant ces expressions dans l'inégalité (15), on reçoit

$$(16) \qquad 4\operatorname{arc\,tang} e^{-\frac{\lambda}{l}} + e^{\frac{\lambda}{l}} - e^{-\frac{\lambda}{l}} > \Pi \qquad (\lambda > 0)$$

ou bien

$$(17) \qquad 4\operatorname{arc\,cot} e^{\frac{\lambda}{l}} + e^{\frac{\lambda}{l}} - e^{-\frac{\lambda}{l}} > \Pi \qquad (\lambda > 0).$$

Si l'on pose enfin dans (16) $e^{-\frac{\lambda}{l}} = z$ et dans (17) $e^{\frac{\lambda}{l}} = z$, on en tire

$$4\operatorname{arc\,tang} z + \frac{1}{z} - z > \pi \qquad (z < 1),$$

$$4\operatorname{arc\,cot} z + z - \frac{1}{z} > \Pi \qquad (z > 1).$$

Ces inégalités admettent certainement une démonstration analytique; les considérations qui précèdent leur donnent l'interprétation géométrique.

REMARQUE SUR LA VALEUR DE i^i;

PAR M. VLADIMIR VARICAK,
Professeur à Osijek (Esseg), en Slavonie.

La vraie valeur de cette expression a été déterminée déjà par Euler. Prenant pour point de départ

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha},$$

équation fondamentale dans la théorie des imaginaires, on trouve

$$i = e^{\frac{\pi}{2} i}.$$

Élevant de côté et d'autre à la puissance i, on obtient

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Jusqu'à ce moment j'estimai ce résultat incontestable; maintenant je trouve dans la *Géométrie de position* de Mouchot [1], à la page 146, le raisonnement que voici :

Comme il est certain que

$$i = e^{\frac{\pi}{2} i},$$

Euler ne fait pas difficulté d'en conclure

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}},$$

et, par suite,

$$-i^i = e^{\frac{\pi}{2}}, \qquad \ldots.$$

Vallès conteste, non sans raison, l'exactitude des deux dernières formules, puisqu'il en résulterait

$$e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} = 0;$$

d'où

$$e^{\pi} = -1,$$

conséquence absurde, et qui ne saurait provenir que d'une fausse hypothèse.

---

[1] A. Mouchot, *Les nouvelles bases de la Géométrie supérieure.* Paris, 1892.

Afin de donner les valeurs exactes, M. Mouchot évalue par son procédé purement géométrique les logarithmes de i^i et de $-i^i$. A la page 141 de l'Ouvrage cité, il donne les égalités

$$i^i = \pm i \qquad \text{et} \qquad -i^i = \mp i;$$

d'où il suit que i^i et $-i^i$ ont pour logarithmes, l'un $\pm \frac{\pi}{2} i$, l'autre $\mp \frac{\pi}{2} i$. Il en résulte

$$i^i = e^{\pm \frac{\pi}{2} i}, \qquad -i^i = e^{\mp \frac{\pi}{2} i},$$

et, si l'on applique à ces nouvelles formules le raisonnement de Vallès, on trouve

$$e^{\pm \frac{\pi}{2} i} + e^{\mp \frac{\pi}{2} i} = 0;$$

d'où

$$e^{\pm \pi i} = -1,$$

résultat exact [1].

Tout cela m'étonnait bien. Je lus plusieurs fois ce passage; cela m'eût coûté beaucoup d'admettre que la déduction d'Euler soit erronée. Celle de Mouchot-Vallès me semblait l'être du moment où j'ai lu à la page 139 de l'Ouvrage cité « qu'élever une vectrice à la puissance i, c'est la convertir en une autre vectrice ayant pour logarithme le sien *changé de mode* », et pourtant quand l'auteur opère avec les angles, dont la tangente excède l'unité, il ne suit pas cette règle [2]. Sur cette déduction douteuse s'appuie la détermination des logarithmes de i^i et de $-i^i$.

Je regrette que M. Mouchot n'ait pas dit où se trouve

---

[1] Ouvrage cité, p. 147.

[2] *Voir* les quatre dernières lignes de la page 139.

la remarque de Vallès sur l'inexactitude de la formule d'Euler, car je voudrais bien connaître son analyse et savoir d'où il a tiré l'égalité

$$-i^i = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Elle est évidemment fausse, et c'est bien difficile de croire qu'elle se trouve dans Euler. Après tout, il me semble qu'elle dérive d'un *lapsus calami*.

En faisant

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}$$

et, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

on a, élevant à la puissance i,

$$(-i)^i = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Si l'on oublie de mettre la base $-i$ entre parenthèses, on a la seconde équation en question. Au moins j'ai en vain tenté de la déduire d'une autre manière. Mais il n'est pas permis d'omettre les parenthèses; $(-i)^i$ n'est pas égal à $-i^i$.

D'ailleurs on a

$$(-i)^i = \left(\frac{1}{i}\right)^i = \frac{1}{i^i} = i^{-i},$$

et enfin

$$i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}},$$

comme la seconde équation. Avec elle on ne peut tirer aucune conséquence absurde, mais avec celles de M. Mouchot on le peut de la manière suivante : nous

avons vu qu'il est arrivé à l'égalité

$$i^i = e^{\pm \frac{\pi}{2} i};$$

prenons les logarithmes népériens, nous aurons

$$ili = \pm \frac{\pi}{2} i$$

et, quand l'on supprime le facteur i, il vient

$$li = \pm \frac{\pi}{2},$$

conséquence absurde et qui est en contradiction avec l'expression donnée à la page 146,

$$li = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i,$$

k désignant un nombre quelconque ou zéro.

SUR LA COURBURE DU CONTOUR APPARENT D'UNE SURFACE PROJETÉE ORTHOGONALEMENT;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Soient, en un point M de la courbe de contact C de la surface S et du cylindre projetant P, MX et MY les tangentes aux sections principales dont les rayons de courbure sont R_0 et R_1, Mm la génératrice du cylindre projetant, m étant la projection de M, MT la tangente à la courbe C, MS la tangente à la section droite du cylindre P, droite perpendiculaire à Mm en M.

Appelons, en outre, R_T et R_m les rayons de courbure en M des sections normales de la surface, menées par MT et Mm, r le rayon de courbure du contour apparent en m, égal à celui de la section droite du cylindre P en M, θ, σ, μ les angles que MT, MS et Mm font avec MX, α l'angle TMm.

La relation d'Euler donne, lorsqu'on l'applique à la surface S,

$$(1) \qquad \frac{1}{R_m} = \frac{\cos^2\mu}{R_0} + \frac{\sin^2\mu}{R_1}$$

et au cylindre P,

$$\frac{1}{R_T} = \frac{\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{r}$$

ou

$$(2) \qquad r = R_T \sin^2\alpha.$$

Puisque, d'après le théorème de Dupin, les droites MT et Mm sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice au point M, on a, par application des théorèmes d'Apollonius

$$(3) \qquad R_T + R_m = R_0 + R_1,$$

$$(4) \qquad R_T R_m \sin^2\alpha = R_0 R_1.$$

Des formules (2) et (3) on tire

$$(5) \qquad r = \frac{R_0 R_1}{R_m},$$

formule qui peut se traduire par ce théorème :

Le produit de la courbure en M *de la section normale faite dans la surface* S *par la génératrice* Mm, *par la courbure en m du contour apparent, est égal à la courbure totale de la surface* S *en* M.

Au moyen de la formule (3), la formule (5) peut être transformée en

$$(6) \qquad r = \frac{R_0 R_1}{R_0 + R_1 - R_T},$$

formule qui lie la courbure du contour apparent à la courbure normale de la courbe de contact de la surface et du cylindre projetant.

Enfin la formule (5), transformée au moyen de (1), donne

$$r = R_1 \cos^2 \mu + R_0 \sin^2 \mu$$

ou

$$(7) \qquad r = R_0 \cos^2 \sigma + R_1 \sin^2 \sigma.$$

Cette dernière formule est celle que M. Mannheim obtient dans son *Cours de Géométrie descriptive* (2e édit., p. 321), en faisant intervenir la considération de la normalie à la surface S le long de la courbe C.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1895.

Composition de Mathématiques.

On donne, d'une part, deux droites D et D′ ne se coupant pas; d'autre part, deux autres droites, Δ et Δ′ ne se coupant pas. On considère une droite variable OA passant par l'origine O, et située dans le plan de coordonnées xOy.

1° Former l'équation de la surface du deuxième degré S qui contient D, D′ et OA.

2° La surface S, et la surface analogue Σ qui contient Δ, Δ′ et OA, se coupent, en dehors de OA, suivant une certaine

courbe. Trouver la surface lieu géométrique de cette courbe, lorsque OA décrit le plan xOy.

3° Déterminer les droites situées sur cette surface.

4° Étudier complètement cette surface dans le cas particulier où les quatre droites D, D′, Δ et Δ′ sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde tangent en O au plan xOy; et montrer que, dans ce cas, le lieu comprend un plan qui demeure invariable lorsque les quatre droites décrivent respectivement des plans passant par le point O.

N. B. On conservera les notations indiquées.

Épure.

Un tore à axe vertical a son centre : 1° à 140^{mm} du bord droit de la feuille, 2° à 180^{mm} du bord inférieur en projection horizontale, et à 310^{mm} du même bord en projection verticale. Le cercle méridien a 28^{mm} de rayon, et son centre est à 68^{mm} de distance de l'axe du tore.

Une sphère de 24^{mm} de rayon touche l'axe du tore à 40^{mm} au-dessus du centre de celui-ci. En projection horizontale le centre de cette sphère est sur la bissectrice de l'angle de deux droites issues du centre du tore, l'une de front dirigée vers la gauche, l'autre debout dirigée vers le haut de la feuille. A cette sphère est circonscrit un cône dont le sommet est sur l'axe du tore, à 93^{mm} au-dessus du centre de celui-ci.

On demande de représenter par ses projections la partie du tore supposé plein qui est intérieure au cône. La courbe d'intersection des deux surfaces sera en traits noirs pleins pour les parties vues, en points noirs ronds pour les parties cachées.

On indiquera en traits rouges la construction : 1° d'un point quelconque de la courbe et de la tangente en ce point; 2° d'un point de la courbe, choisi sur chacun des contours apparents circulaires du tore; 3° de la sphère, ainsi que des parties du tore et du cône en dehors de l'intersection.

Calcul trigonométrique.

On donne dans un triangle la base $a = 2257^{m},83$, et les deux angles $B = 71°22'34'',5$; $C = 39°51'20'',6$.

Calculer A, b, c, la surface S, et la hauteur H correspondant à la base a.

Composition de Physique et Chimie.

Physique. — I. Lunette de Galilée.

II. Détermination du poids d'un litre d'air à 0°, et à la pression de 76^{cm}. (On supposera connue la détermination du poids spécifique des gaz.)

Chimie. — Indiquer : 1° les différences qui existent entre le chlore et l'azote, et entre leurs composés; 2° les rapprochements qu'on peut établir entre ces corps.

Composition française.

Expliquer et justifier cette pensée d'un écrivain étranger :

« La France réserve d'heureuses surprises à ses amis et à ses ennemis aux plus tristes jours de son histoire. Il y a dans ce peuple étrange, après les désastres et les décadences, une vigueur de renaissance, une vitalité excitée par le malheur, une faculté à revivre qui doivent mettre en garde ses ennemis les plus triomphants contre un mépris prématuré, et les Français contre le découragement et le désespoir, contre le doute même à l'égard de leur immortelle patrie. »

CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

Bien qu'en dépit d'une légende assez répandue, le sujet de la Composition mathématique, pour l'admission à l'École Polytechnique, n'ait pas été, cette année, pro-

posé par moi, j'ai rencontré, en m'en occupant, une élégante solution géométrique de l'une des questions posées, qui intéressera peut-être quelques-uns de vos lecteurs. Je vous demande la permission de l'exposer en quelques mots.

Étant donnés deux couples de droites quelconques D, D′ et Δ, Δ′, un plan P et un point O dans ce plan, il s'agit de trouver le lieu de l'intersection de deux surfaces du second ordre S et Σ, contenant toutes deux une même droite variable OA du plan P et passant, l'une par les droites D et D′, l'autre par les droites Δ et Δ′.

Soient a, a', α, α' les traces respectives de D, D′, Δ, Δ′ sur le plan P, b et b' les points où D et D′ sont rencontrées par une même droite issue du point O, β et β' les points où Δ et Δ′ sont rencontrées par une même droite issue également de O. Les droites aa' et bb', rencontrant chacune les trois droites OA, D et D′ de la surface S, sont situées sur cette surface. Par suite, lorsque OA pivote autour du point O, la surface S passe constamment par le quadrilatère gauche $aa'b'b$, de manière à engendrer un faisceau ponctuel, en restant constamment en correspondance homographique avec OA. De même la surface Σ passe constamment par le quadrilatère gauche $\alpha\alpha'\beta'\beta$ et forme un second faisceau ponctuel, en restant également en correspondance homographique avec OA. Par suite, les surfaces S et Σ des deux faisceaux se correspondent homographiquement et, d'après un théorème bien connu, leur intersection complète engendre une surface du quatrième ordre. Mais l'intersection comprend la droite OA qui décrit le plan P. La cubique gauche, complétant cette intersection, engendre donc une surface du troisième ordre.

Cette surface, comme on le voit presque immédiatement, peut encore être engendrée de la manière suivante. On fait pivoter le plan P autour du point O. Dans chacune de ses positions, on joint les points où il rencontre les droites D et D′, les points où il rencontre les droites Δ et Δ′. Le point d'insersection des droites ainsi obtenues engendre la surface du troisième ordre en question. Ce qu'il y a de particulièrement remarquable, c'est que toute surface du troisième ordre peut être décrite par le mode de génération qui vient d'être indiqué et même d'un certain nombre de manières. Ce nombre est égal à 216000, dans le cas où les 27 droites de la surface sont réelles. Enfin ce mode de génération conduit à un mode de représentation plane d'une surface quelconque du troisième ordre. En effet, au plan P, mobile autour du point O, menons, dans chacune de ses positions, une perpendiculaire en O. La trace de cette droite sur un plan fixe arbitraire correspondra à un point unique de la surface et réciproquement.

Il y aurait là matière à de plus amples développements; mais je me bornerai à ces remarques très générales, qui m'ont paru présenter un certain intérêt, sans pouvoir affirmer d'ailleurs qu'elles sont nouvelles.

Veuillez, Monsieur le Rédacteur, agréer l'expression de mes sentiments distingués.

G. Fouret.

Paris, le 5 juin 1895.

SUR LES EXPONENTIELLES IMAGINAIRES;

PAR M. G. TARRY.

On sait que les nombres qui mesurent les angles sont des logarithmes dont la base est $e^{\sqrt{-1}}$ ou ε. La figure géométrique formée par deux droites qui se coupent représente une infinité d'angles égaux au point de vue de leur représentation matérielle, mais non identiques puisqu'ils diffèrent de multiples de 2π. Pareillement, la figure algébrique $a + b\sqrt{-1}$ représente l'infinité des nombres

$$\ldots, \quad \varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}-2\pi}, \quad \varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}, \quad \varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}+2\pi}, \quad \ldots,$$

égaux au point de vue de la représentation matérielle algébrique, mais non identiques, puisque les exposants diffèrent de multiples de 2π.

Ce rapprochement entre les angles et les exponentielles met en lumière cette vérité d'apparence paradoxale : deux nombres égaux élevés à des puissances égales peuvent donner deux nombres inégaux, et réciproquement deux nombres inégaux élevés à des puissances égales peuvent donner deux nombres égaux. Ainsi les nombres égaux $\varepsilon^{2\pi}$, $\varepsilon^{4\pi}$ élevés à la puissance $\sqrt{-1}$ donnent les nombres inégaux $\varepsilon^{2\pi\sqrt{-1}}$, $\varepsilon^{4\pi\sqrt{-1}}$, et réciproquement les nombres inégaux $\varepsilon^{2\pi\sqrt{-1}}$, $\varepsilon^{4\pi\sqrt{-1}}$ élevés à la puissance $-\sqrt{-1}$ donnent les nombres égaux $\varepsilon^{2\pi}$, $\varepsilon^{4\pi}$. De même, si l'on élève à la puissance $\frac{1}{2}$ les nombres égaux $(+1)^2$ et $(-1)^2$, on obtient les nombres inégaux $+1$ et -1.

Mais deux nombres égaux et identiques, élevés à des

puissances égales, donnent toujours deux nombres égaux et identiques, puisqu'on a identiquement

$$\left(\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}+2\lambda\pi}\right)^{m+n\sqrt{-1}} = \varepsilon^{(\alpha+\beta\sqrt{-1}+2\lambda\pi)(m+n\sqrt{-1})}.$$

L'exposant $m + n\sqrt{-1}$ représentant une infinité de nombres égaux et non identiques, on voit qu'on a admis implicitement le *postulatum* suivant :

Deux nombres identiques élevés à des puissances égales et non identiques donnent deux nombres identiques.

Deux nombres identiques, soumis à des opérations non identiques, ne pouvant donner des résultats absolument identiques, il demeure sous-entendu que les nombres obtenus sont considérés comme identiques au point de vue seulement de la représentation algébrique de la forme $\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$. Ces nombres diffèrent nécessairement, mais ils se confondent dans cette représentation algébrique, comme deux nombres de la forme $\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$ dont les exposants diffèrent de 2π se confondent dans la représentation $a + b\sqrt{-1}$, ou comme deux angles qui diffèrent de 2π se confondent dans la représentation géométrique.

En résumé, si l'on veut éviter l'introduction en Algèbre d'une *nouvelle espèce de quantité imaginaire,* il faut admettre que les nombres

$$\left(\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right)^{\left(\varepsilon^{\gamma+\delta\sqrt{-1}}\right)} \quad \text{et} \quad \left(\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right)^{\left(\varepsilon^{\gamma+\delta\sqrt{-1}+2\pi}\right)}$$

sont égaux au point de vue de la représentation sous la forme $\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$.

Cela accepté, aucune difficulté ne peut se présenter dans le calcul des exponentielles. Les contradictions qu'on a cru rencontrer doivent être attribuées à des raisonnements inexacts ou à des erreurs de calcul.

Il convient de signaler ici une faute de calcul commise en 1876 par M. Vallès, et qui ne paraît pas avoir été signalée, car elle a été répétée en 1892 par M. Mouchot (*Nouvelles bases de la Géométrie supérieure*, p. 147).

On lit dans l'Ouvrage de M. Vallès *Sur les formes imaginaires en Algèbre* (3e partie, p. 40) :

« Dans la formule d'Euler

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

si l'on élève les deux membres à la puissance $\sqrt{-1}$, il viendra

$$e^{-x} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^{\sqrt{-1}},$$

égalité qui, en faisant $x = \frac{\pi}{2}$, se réduit à

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

» Élevons maintenant les deux termes de la formule d'Euler à la puissance $-\sqrt{-1}$, il viendra

$$e^{x} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^{-\sqrt{-1}} = (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^{\sqrt{-1}},$$

égalité qui, si l'on suppose que x devient $\frac{\pi}{2}$, donne

$$e^{\frac{\pi}{2}} = (-\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}.$$

» Or, cette valeur de $-\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ ajoutée avec celle de $+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ donne

$$e^{+\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{\pi} = -1,$$

ce qu'aucun géomètre à coup sûr ne sera disposé à admettre. »

Le résultat auquel arrive M. Vallès est dû à l'omission

d'une parenthèse. En effet, si dans l'égalité

$$e^x = (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^{\sqrt{-1}},$$

on suppose que x devient $\frac{\pi}{2}$, on a

$$e^{\frac{\pi}{2}} = (-\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}},$$

et cette valeur ajoutée à celle de $+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ ne donne plus o.

On éviterait bien des confusions si l'on adoptait une notation spéciale pour distinguer l'identité de la simple égalité. Il est regrettable que le même signe $=$ figure l'égalité dans les relations

$$1 . \varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = \varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}, \qquad a(-1)^2 = a,$$

et l'identité dans les relations

$$\sqrt[4]{a}\sqrt{-1} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{a(-1)^2} = \sqrt[4]{a}.$$

PROBLÈME DU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1894;

PAR M. RAYMOND SÉE,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée Janson de Sailly.

On donne un triangle ABC dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{cases} X = 0, \\ Y = 0, \\ Z = 0, \end{cases}$$

une conique S touchant en A et B les côtés CA et CB de l'angle ACB et dont l'équation est $XY = Z^2$.

Sur cette conique S, on prend le point φ défini par les

équations $X = Y = Z$, et un point variable M; enfin on désigne par ν le point où la droite $C\mu$ rencontre la corde de contact AB.

Cela posé, on joint le point M à l'un des points m de AB qui ont même polaire par rapport aux angles AMB et $\mu M \nu$:

1° Démontrer que, M décrivant S, la droite Mm enveloppe une courbe Σ du quatrième ordre et de la troisième classe, dont l'équation tangentielle est

$$u^3 + v^3 - uvw = 0.$$

2° Aux points où une droite D rencontre la courbe Σ, on mène à cette courbe les quatre tangentes T_1, T_2, T_3, T_4, et l'on considère la conique C_1 inscrite dans le pentagone formé par ces quatre tangentes et la droite AB. Démontrer que, si l'on assujettit C_1 à passer par un point P, la droite D enveloppe une conique C_2;

3° Montrer que la conique C_2 se réduit à deux points f, f' quand le point P est sur une certaine conique C_3. Trouver dans ce cas l'enveloppe Σ' de la droite ff' et le lieu des points f et f'.

$$S \left\{ XY - Z^2 = 0. \right. \qquad \mu \left\{ X = Y = Z, \right. \qquad M\mu \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \frac{1}{\lambda} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\left| \begin{array}{ll} BC & X = 0, \\ CA & Y = 0, \\ AB & Z = 0, \end{array} \right. \qquad \nu \left\{ \begin{array}{l} X = Y. \\ Z = 0, \end{array} \right.$$

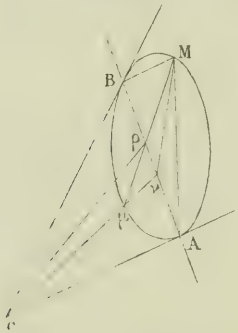
$$M \left\{ \begin{array}{l} X = \lambda Z. \\ Y = \frac{Z}{\lambda}, \end{array} \right. \qquad \rho \left\{ \begin{array}{l} Z = 0, \\ \frac{X}{-\lambda} = Y. \end{array} \right.$$

Les points de AB, qui ont même polaire par rapport

aux deux angles AMB, $\mu M \nu$, ont même conjugué harmonique par rapport aux deux segments AB et $\rho\nu$ et, par suite, même polaire par rapport aux angles ACB et $\rho C \nu$.

$$m \begin{cases} Z = 0, \\ Y = \alpha X; \end{cases}$$

Fig. 1.



sa polaire par rapport à

$$\begin{aligned} &ACB, \qquad \alpha X + Y = 0, \\ &\rho C \nu, \qquad X[\alpha(\lambda - 1) + 2] + Y(-2\alpha\lambda + \lambda - 1) = 0, \\ &\alpha(-2\alpha\lambda + \lambda - 1) - \alpha(\lambda - 1) - 2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2 \lambda + 1 = 0.$$

Donc à tout point M correspondent deux points

$$m \begin{cases} Z = 0, \\ Y = \mp \sqrt{\frac{-1}{\lambda}}\, X, \end{cases}$$

réels si $\lambda < 0$.

I.

$$M\begin{cases} X = \lambda Z, \\ Y = \dfrac{Z}{\lambda}, \end{cases} \qquad m\begin{cases} Z = 0, \\ Y = \alpha X, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \alpha^2\lambda + 1 = 0,$$

$$M\mu \quad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \lambda & \dfrac{1}{\lambda} & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \end{vmatrix} = -\alpha X - Y - Z\left(\lambda\alpha - \frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

J'identifie avec

$$uX + vY + wZ = 0,$$

$$\frac{-\alpha}{u} = \frac{1}{v} = \frac{\lambda\alpha - \dfrac{1}{\lambda}}{w}, \qquad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{u}{v}, \\ \lambda\alpha - \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{w}{v}, \\ \alpha^2\lambda + 1 = 0, \end{cases}$$

ou, en éliminant α et λ,

$$\Sigma \quad \{ u^3 + v^3 = uvw,$$

courbe de la troisième classe.

Pour avoir l'équation ponctuelle, je cherche l'enveloppe de

$$\alpha^3 Z - \alpha^2 X - \alpha Y - Z = 0$$

(obtenue en remplaçant λ dans Mm), c'est-à-dire que j'élimine α entre

$$\begin{cases} 3\alpha^2 Z - 2\alpha X + Y = 0, \\ -\alpha^2 X + 2\alpha Y - 3Z = 0, \end{cases} \quad \Sigma \{ (XY - 9Z^2)^2 - 4(3YZ - X^2)(3XZ - Y^2) = 0,$$

courbe du quatrième ordre.

II.

Soit une droite D de coordonnées u_0, v_0, w_0.

$$\Sigma = u^3 + v^3 - uvw = 0.$$

$$u_0\frac{\partial\Sigma}{\partial u} + v_0\frac{\partial\Sigma}{\partial v} + w_0\frac{\partial\Sigma}{\partial w}$$
$$= u_0(3u^2 - vw) + v_0(3v^2 - uw) - w_0 uv = 0$$

représente une conique tangente aux quatre droites T_1, T_2, T_3, T_4. Elle est de plus tangente à AB (puisque pas de terme en w^2). Il n'y a qu'une seule conique tangente à cinq droites. L'équation précédente est donc celle de la conique C_1,

$$C_1 = 3u_0u^2 + 3v_0v^2 - u_0vw - v_0wu - w_0uv = 0.$$

Soit

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0$$

l'équation d'un point P. Pour exprimer qu'il est sur la conique C_1, j'élimine w et j'exprime que l'équation homogène

$$3u_0u^2 + 3v_0v^2 - w_0uv + \left(u_0v + v_0u\left(\frac{ux_0 - vy_0}{z_0}\right)\right) = 0$$

a ses racines égales.

En supprimant les indices,

$$C_2 = (ux_0 + vy_0 - wz_0)^2 - 4(3uz_0 - vx_0)(3vz_0 - uy_0) = 0,$$

équation de la conique enveloppée par D.

III.

Pour que la conique C_2 se réduise à deux points, il faut que le premier membre de son équation soit une somme de deux carrés au plus. Il faut donc que les trois demi-dérivées partielles, égalées à zéro, aient en u, v, w un système commun de solutions, qui sont précisément les coordonnées de la droite ff'.

C_2 est de la forme $R^2 - 4PQ = 0$,

$$\left|\begin{array}{l} R = ux_0 + vy_0 + wz_0, \\ P = 3uz_0 - vx_0, \\ Q = 3vz_0 - uy_0. \end{array}\right.$$

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x_0R - 2y_0P - 6z_0Q = 0, \\ y_0R - 6z_0P - 2x_0Q = 0, \\ z_0R = 0. \end{array}\right.$$

J'élimine P, Q, R : il vient

$$AB \quad Z = 0,$$
$$C_3 = XY - 9Z^2 = 0,$$

conique bitangente à S aux deux points A et B.

Enveloppe de ff'. — Posons

$$P \begin{cases} X_0 = 3\lambda Z_0, \\ Y_0 = \dfrac{3Z_0}{\lambda}. \end{cases}$$

Il faut éliminer λ entre les deux équations auxquelles se réduit le système (1),

$$\begin{cases} Y_0 P + 3Z_0 Q = 0, \\ R = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u + \lambda v = 0, \\ 3\left(u\lambda + \dfrac{v}{\lambda}\right) + w = 0. \end{cases}$$

$$\Sigma' = u^3 + v^3 - \tfrac{1}{3} uvw = 0.$$

Lieu des points f et f'. — Je remplace, dans C_2, X_0, Y_0, Z_0 en fonction de λ,

$$\left(3u\lambda + \frac{3v}{\lambda} + w\right)^2 - \frac{4}{\lambda}(3u + 3\lambda v)^2 = 0.$$

C_2 se décompose alors en deux fonctions linéaires, équations des points dont nous cherchons le lieu.

Soit

$$f = u\lambda + \frac{v}{\lambda} + \frac{w}{3} - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}(u + \lambda v) = 0.$$

Je pose $\sqrt{\lambda} = t$,

$$u(t^4 - 2t) + v(1 - 2t^3) + w\frac{t^2}{3} = 0.$$

Je résous donc les deux équations

$$\begin{cases} u(2t^3 - 1) - 3t^2 v + \dfrac{t}{3} w = 0, \\ u(3t) + v(t^3 - 2) + \dfrac{t^2}{3} w = 0. \end{cases}$$

et

$$\frac{u}{\frac{2t}{3}(t^3+1)} = \frac{v}{\frac{2t^2}{3}(t^3-1)} = \frac{w}{2(t^3+1)^2},$$

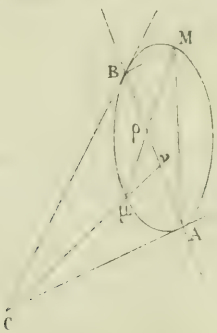
$$\begin{cases} v = tu, \\ w = 3\,\dfrac{(t^3-1)}{t}\,u, \end{cases} \qquad \Sigma' = u^3 + v^3 - \tfrac{1}{3}\,uvw = 0.$$

L'enveloppe de ff', le lieu de f, le lieu de f' sont donc une seule et même courbe : cette courbe Σ' est du quatrième ordre et de la troisième classe, comme Σ.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Les deux points m, qui ont même polaire par rapport aux deux angles AMB, μMν, sont les points de AB

Fig. 2.

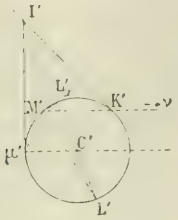


communs aux deux involutions définies par leurs points doubles A, B, ρ, ν.

Cela posé, je projette la figure de manière que la droite AB devienne la droite de l'infini, et les points AB les points cycliques. La conique S devient un cercle de centre C′ projection de C. Le point μ devient un certain point μ'.

Le faisceau en involution MA, MB se projette suivant un nouveau faisceau en involution. Ce dernier traçant sur la droite de l'infini une involution dont les points

Fig. 3.

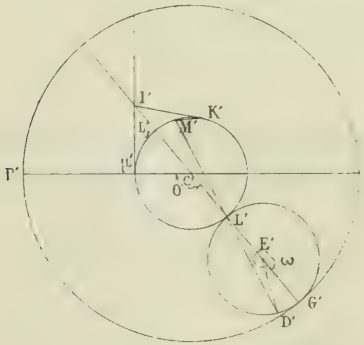


doubles sont les points cycliques est engendré par un angle droit tournant autour de M', et son point image est C', quel que soit M'.

Le deuxième faisceau en involution a pour point image le point I'. Par suite, les droites dont nous cherchons l'enveloppe sont les droites M'L', M'L'₁.

Cette enveloppe doit être une hypocycloïde à trois

Fig. 4.



rebroussements : car elle est de troisième classe, de quatrième ordre, et bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques. De plus, cette hypocycloïde doit avoir

pour centre le point C′ et pour cercle de roulement un cercle de rayon égal au triple de celui de S′, car les deux droites M′L′ et M′L′₁ sont rectangulaires, et l'on sait que le lieu des points, d'où l'on peut mener à l'hypocycloïde à trois rebroussements deux tangentes rectangulaires, est le cercle inscrit à cette hypocycloïde.

Nous allons le démontrer directement.

Considérons le cercle de centre C′ et de rayon égal au triple de celui de S′, et le cercle de rayon égal à celui de S′ tangent à S′ en L′. La droite M′L′ rencontre le second cercle en D′. Cherchons le lieu de D′,

$$\omega = 2\pi + G'E'D' = 2\pi + 2M'L'L'_1,$$
$$2M'L'L'_1 = M'C'\mu' - (\pi - O),$$
$$2(\pi - O) = \pi - M'C'\mu',$$
$$\omega + 2\pi + \pi - 2(\pi - O) - (\pi - O) = 3O.$$

$\omega = 3O$. Donc D′ décrit une hypocycloïde à trois rebroussements, et l'on sait que la tangente à cette hypocycloïde en D′ est la droite L′D′. Donc M′L′ enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

La courbe Σ est donc la perspective d'une hypocycloïde à trois rebroussements.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1894 (¹);

PAR M. J. LEMAIRE.
Professeur au lycée de Douai.

L'équation générale des hyperboles équilatères qui déterminent sur Oy des segments ayant leur milieu au

(¹) *Voir* 3e série, t. XIII, p. 503.

point O est

$$x^2 - y^2 + 2Bxy + 2Dx + F = 0.$$

Écrivant que les traces de ces courbes sur Ox partagent harmoniquement le segment AB, nous avons la condition

$$F + ab = -D(a + b),$$

de sorte que l'équation générale des hyperboles H est

$$(H) \quad f(x, y) = x^2 - y^2 + 2Bxy + 2Dx - ab - D(a + b) = 0.$$

I. Pour établir la première partie, il suffit de prouver qu'il y a une infinité de points dont les polaires, par rapport aux coniques (H), concourent.

La polaire d'un point $M(x_0, y_0)$, par rapport à H, a pour équation

$$x_0 x - y_0 y - ab + B(x_0 y - y_0 x) + D(x + x_0 - a - b) = 0.$$

Cette droite passera par un point fixe, quels que soient B et D, si l'on peut trouver x et y, de manière que

$$x_0 x - y_0 y - ab = 0,$$
$$x_0 y + y_0 x = 0,$$
$$x - x_0 - a - b = 0.$$

Pour que ces trois équations, linéaires en x et y, aient une solution, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} x_0 & -y_0 & -ab \\ y_0 & x_0 & 0 \\ 1 & 0 & x_0 - a - b \end{vmatrix} = 0,$$

autrement dit, que le point M soit sur la courbe

$$(1) \qquad (x - a - b)(x^2 - y^2) + abx = 0.$$

Cette condition étant remplie, les polaires de M, par rapport aux hyperboles H, ont un point commun M',

dont les coordonnées x_1, y_1 satisfont aux relations

$$(2)\qquad \begin{cases} x_0 x_1 - y_0 y_1 - ab = 0, \\ x_0 y_1 + y_0 x_1 = 0, \\ x_0 + x_1 - a - b = 0. \end{cases}$$

Ces conditions étant symétriques par rapport aux coordonnées de M et de M′, il y a réciprocité entre ces points; les polaires de M′, par rapport aux coniques (H), passent en M, et le point M′ appartient aussi à la courbe (1) : nous dirons que les points M et M′ sont conjugués.

Pour qu'une conique H se réduise à deux droites, il faut et il suffit que le centre de cette conique soit sur la courbe, c'est-à-dire que les équations

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_x &= x + \mathrm{B}y + \mathrm{D} = 0, \\ \tfrac{1}{2} f'_y &= -y + \mathrm{B}x = 0, \\ \tfrac{1}{2} f'_z &= \mathrm{D}x - ab - \mathrm{D}(a+b) = 0 \end{aligned}$$

aient une solution en x, y, d'où une relation conditionnelle entre B et D; nous aurons le lieu des centres des coniques (H) ainsi réduites à deux droites en éliminant B et D entre les équations ci-dessus; nous obtenons ainsi

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x \\ x & 0 & -y \\ 0 & x-a-b & -ab \end{vmatrix} = 0.$$

Nous retrouvons la courbe (1); donc les points M et M′ sont les centres d'hyperboles (H) réduites à deux droites.

II. La deuxième relation (2) $\frac{y_1}{x_1} = -\frac{y_0}{x_0}$ exprime que OM et OM′ sont également inclinées sur les axes de coordonnées ; donc, les coniques de foyers M et M′, qui

passent en O, sont l'une tangente, l'autre normale à Ox.

Si nous éliminons b entre les deux autres relations (2), nous avons

$$y_0 y_1 = (x_0 - a)(x_1 - a).$$

Cette relation exige que y_0 et y_1 d'une part, $(x_0 - a)$ et $(x_1 - a)$ d'autre part, soient à la fois de même signe ou de signes contraires, autrement dit que M et M′ soient à la fois du même côté de Ox et de la droite $x - a = 0$, ou de part et d'autre de ces deux droites; elle exprime que le produit des distances des points M et M′ à cette dernière droite est égal au produit des distances de ces points à Ox; il en résulte que la conique tangente à Ox en O, et ayant pour foyers M et M′, est aussi tangente à la droite $x - a = 0$. On verrait de même qu'elle est tangente à la droite $x - b = 0$.

III. La troisième relation (2), mise sous la forme

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{a + b}{2},$$

montre que le lieu des milieux des segments MM′ est la parallèle à Oy menée par le milieu de AB.

Le lieu S des points M et M′ n'est autre que la courbe (1) obtenue plus haut.

C'est une cubique circulaire admettant Ox pour axe de symétrie, pour asymptote d'inflexion la droite

$$x - a - b = 0.$$

On la construit sans difficulté en résolvant son équation par rapport à y

$$y = \pm\sqrt{\frac{x(x-a)(x-b)}{a+b-x}}.$$

On peut supposer $b > a$ et distinguer quatre cas,

selon que l'on a

1° $$b > a > 0,$$

2° $$b > 0 > a \quad \text{et} \quad b + a > 0,$$

3° $$b > 0 > a \quad \text{et} \quad b + a < 0,$$

4° $$0 > b > a.$$

On a les quatre formes correspondantes indiquées dans les *fig.* 1, 2, 3, 4.

Nous indiquerons, plus loin, un mode de construction de cette courbe par points et par tangentes.

IV. Montrons qu'elle peut se reproduire de trois manières par inversion.

D'abord, tout pôle d'inversion répondant à la question doit évidemment être sur la courbe; soit (x_0, y_0) un pareil point et une droite

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \rho \qquad (\text{avec } \alpha^2 + \beta^2 = 1),$$

passant par ce point. L'équation aux ρ des points communs à la courbe et à cette droite est

$$(x_0 + \alpha\rho - a - b)[(x_0 + \alpha\rho)^2 + (y_0 + \beta\rho)^2] + ab(x_0 + \alpha\rho) = 0,$$

ou, en tenant compte de ce que le pôle est sur la courbe, et supprimant le facteur ρ,

$$\begin{aligned}\alpha\rho^2 + [x_0 - a - b + 2\alpha(\alpha x_0 + \beta y_0)]\rho + \alpha(x_0^2 + y_0^2)\\ + 2(x_0 - a - b)(\alpha x_0 + \beta y_0) + ab\alpha = 0.\end{aligned}$$

Le produit des racines, qui a pour valeur

$$x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 - a - b)\left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha} y_0\right) + ab,$$

sera indépendant de α et β, si l'on a

$$(x_0 - a - b) y_0 = 0,$$

et seulement à cette condition. Le premier facteur

donne le point de la courbe situé à l'infini sur l'asymptote réelle, qui est une solution singulière. L'autre facteur donne les trois pôles d'inversion O, A, B; on

Fig. 1.

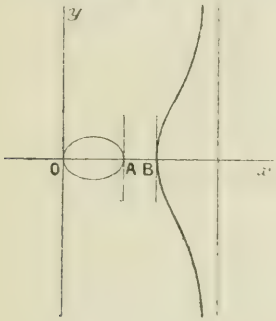


Fig. 2.

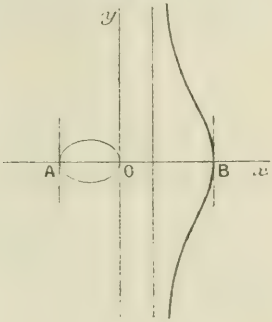


Fig. 3.

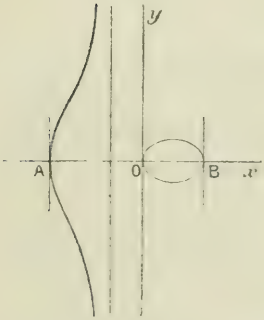
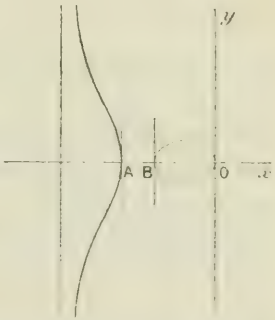


Fig. 4.



aurait sans peine les modules d'inversion correspondants.

A chacun de ces pôles, on peut faire correspondre une famille de cercles qui touchent chacun la courbe S en deux points, et dont cette courbe est l'enveloppe.

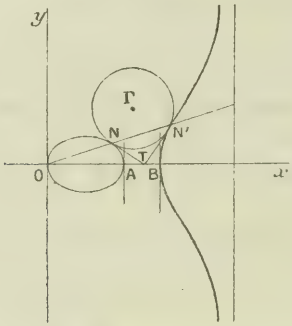
D'abord, au pôle situé à l'infini dans la direction Oy, correspondent des cercles bitangents à S et ayant leurs centres sur Ox; nous ne nous y arrêterons pas.

Considérons le pôle O, qui permet de reproduire la

courbe elle-même par inversion, et supposons, pour fixer les idées, $b > a > 0$ (*fig.* 1).

Soit (*fig.* 5) ONN′ une sécante quelconque passant par O : on sait que les tangentes en N et N′ à S forment avec NN′ un triangle isoscèle NTN′; par conséquent, le

Fig. 5.



cercle passant par N, N′, et tangent en N à la courbe S est aussi tangent à cette courbe en N′; la courbe S est l'enveloppe de ce cercle, quand la sécante tourne autour de O; les autres points communs à ce cercle et à S sont les points cycliques.

Cherchons l'équation de ce cercle que nous appellerons Γ; soit

$$y - \lambda x = 0$$

l'équation de la droite ONN′, l'équation

$$(S) - k(y - \lambda x)^2 = 0,$$

où (S) représente le premier membre de l'équation (1), est l'équation générale des cubiques qui passent par les points communs à la cubique S et à la cubique

$$z(y - \lambda x)^2 = 0,$$

c'est-à-dire des cubiques circulaires tangentes à S en O, N et N′, et passant par le point à l'infini sur Oy.

La cubique formée de l'axe Oy et du cercle Γ est une de ces cubiques; nous aurons son équation en déterminant k de manière que x soit en facteur dans le premier membre de l'équation écrite plus haut, d'où

$$-k = a + b.$$

Cette équation devient alors

$$(x - a - b)(x^2 + y^2) + abx + (a + b)(y - \lambda x)^2 = 0,$$

d'où, en supprimant x dans le premier membre, l'équation du cercle Γ

$$(\Gamma) \quad x^2 + y^2 + (\lambda^2 - 1)(a + b)x - 2\lambda(a + b)y + ab = 0.$$

Si l'on cherche l'enveloppe de ce cercle, on retrouve bien la courbe S.

Les équations du centre de Γ sont

$$2x + (\lambda^2 - 1)(a + b) = 0,$$
$$y - \lambda(a + b) = 0.$$

Éliminant λ entre ces deux équations, on obtient

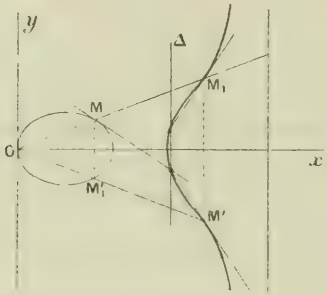
$$x^2 + y^2 - [x - (a + b)]^2,$$

qui représente la parabole ayant pour foyer le point O et pour directrice l'asymptote de S : cette conique est le lieu des centres des cercles Γ.

Transportant l'origine en A, on verra de la même façon que la courbe S est l'enveloppe des cercles Γ′ qui la touchent chacun en deux points en ligne droite avec A, et dont le lieu des centres est la parabole ayant pour foyer le point O et pour directrice la parallèle à Oy menée par le point B; enfin, cette courbe est l'enveloppe des cercles Γ″ qui la touchent chacun en deux points en ligne droite avec B, et dont le lieu des centres est la parabole qui a pour foyer O et pour directrice la parallèle à Oy menée par A.

V. Soient M et M′ deux points conjugués (*fig.* 6); les droites OM et OM′ sont symétriques par rapport à Ox; OM coupe la courbe S en un troisième point M_1 symétrique de M′, OM′ coupe S en M'_1 symétrique de M.

Fig. 6.



D'après un théorème connu, les tangentes à S en O, M et M_1 coupent la courbe en trois points situés sur une droite Δ; comme la tangente en O coupe S en un troisième point à l'infini, Δ est perpendiculaire à Ox. De même, les tangentes en M′ et M'_1 coupent S en deux points situés sur une droite Δ′ perpendiculaire à Ox. Mais OMM_1 et $OM'M'_1$ étant symétriques par rapport à Ox, Δ et Δ′ sont également symétriques par rapport à Ox, et par suite se confondent. On en conclut que les tangentes en M et M′ concourent sur la courbe : ainsi le lieu du point de rencontre des tangentes à la courbe S en deux points conjugués M, M′ est la courbe elle-même.

Remarques. — 1° L'équation générale des hyperboles (H) contenant deux paramètres B et D au premier degré, ces coniques forment un réseau linéaire.

Si l'on astreint ces coniques à passer par un même point, l'équation ne renferme plus qu'un paramètre au premier degré; on conclut de là que les hyperboles H

qui ont un point commun ont trois autres points communs.

La courbe S n'est autre chose que la hessienne du système des trois coniques

$$\left\{\begin{aligned} x^2 - y^2 - ab &= 0, \\ xy &= 0, \\ z(2x - a - b) &= 0, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire le lieu des points dont les polaires, par rapport à ces trois coniques, concourent, et aussi le lieu du point commun à ces polaires.

Si M et M′ sont deux points conjugués, OM et OM′ forment avec Ox et Oy (2e conique) un faisceau harmonique, et sont par suite également inclinées sur les axes; M et M′ étant conjugués par rapport à la troisième conique, qui se compose de la droite de l'infini du plan et de la droite

$$2x - a - b = 0,$$

le milieu de MM′ est sur cette dernière droite; c'est bien ce que nous avons trouvé.

2° Il est facile de construire S par points et tangentes :

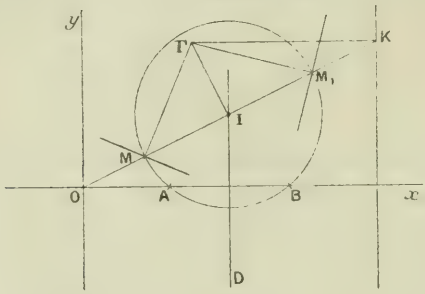
Supposons, par exemple, $b > a > 0$ et soit OMM$_1$ une sécante passant par O; la courbe S étant anallagmatique par rapport au point O pris pour pôle, nous avons (*fig.* 7)

$$\mathrm{OM} \times \mathrm{OM_1} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB},$$

et les quatre points M, M$_1$, A, B, sont sur un cercle. Nous avons vu que le milieu de MM′ (M′ symétrique de M$_1$ par rapport à Ox) est sur la perpendiculaire à AB en son milieu; le milieu I de MM$_1$ est aussi sur cette droite; par conséquent, I est le centre du cercle MM$_1$AB; d'où la construction suivante de S : par O, on mène une droite quelconque qui coupe en I la perpendiculaire D

à AB en son milieu; sur cette droite, on prend $IM = IM_1 = IA$; les points M et M_1 appartiennent à la

Fig. 7.



courbe S; on retrouve facilement l'asymptote à l'aide de cette construction.

OMM_1 rencontre l'asymptote en K; la parallèle à Ox menée par K et la perpendiculaire en I à OMM_1 se coupent au centre Γ du cercle considéré plus haut; les perpendiculaires à ΓM et ΓM_1 en M et M_1 sont les tangentes en ces points à la courbe S.

3° Remarquons que O ayant la même puissance par rapport aux cercles Γ, ces cercles coupent orthogonalement un cercle fixe de centre O; de même les cercles Γ′ coupent orthogonalement un cercle fixe de centre A, et les cercles Γ″ un cercle fixe de centre B; les rayons de ces cercles sont respectivement $\sqrt{\overline{OA} \times \overline{OB}}$, $\sqrt{\overline{AB} \times \overline{AO}}$, $\sqrt{\overline{BO} \times \overline{BA}}$; deux sont donc réels et l'autre imaginaire.

Tout cercle coupe la courbe S aux points cycliques et en quatre points à distance finie; on démontre sans peine que, par ces quatre derniers points, on peut faire passer une hyperbole ayant pour asymptote l'asymptote de S; en particulier, par deux points de S en ligne droite avec O, A ou B, on peut faire passer une hyper-

bole tangente en ces points à S et admettant pour asymptote l'asymptote de S.

Si l'on cherche le lieu des points de rencontre des tangentes à S en deux points en ligne droite avec O, on obtient un cercle de diamètre OE, le point E étant le conjugué harmonique de O par rapport à A et B.

Du théorème invoqué dans la cinquième partie, il résulte que, si OMM_1 passe par un des points d'inflexion M_1 de la courbe, la tangente en M passe par l'autre.

ÉTUDE SUR UN FAISCEAU DE CONIQUES;

PAR M. MEYER,
Professeur au lycée de Nancy.

Nous nous proposons de montrer comment on peut étendre à un faisceau de quatre coniques certaines propriétés bien connues du système de deux coniques. A cet effet, nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Étant données trois coniques d'un faisceau ponctuel (S, S', Σ), la droite AB qui joint un point quelconque A de la conique (S) à un point B de la conique (S') conjugué de A par rapport à (Σ) est tangente à une conique fixe, et le lieu du point de rencontre des tangentes à S et à S' aux points A et B est une conique du faisceau considéré. Soient en effet

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$
$$S' = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0$$

les équations des coniques (S, S') rapportées à leur triangle autopolaire commun, et $S - KS' = 0$ l'équation de (Σ). Si (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) sont les coordonnées

des points A′ et B′ où AB rencontre Σ, les coordonnées des points A et B sont de la forme $(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$ et $(x_1 - \lambda x_2, y_1 - \lambda y_2, z_1 - \lambda z_2)$. Écrivons que ces points appartiennent à S et à S′, on obtient

$$a(x_1 + \lambda x_2)^2 + b(y_1 + \lambda y_2)^2 + c(z_1 + \lambda z_2)^2 = 0,$$
$$a'(x_1 - \lambda x_2)^2 + b'(y_1 - \lambda y_2)^2 + c'(z_1 - \lambda z_2)^2 = 0,$$

et en retranchant de la première équation la deuxième multipliée par K

$$a x_1 x_2 + b y_1 y_2 + c z_1 z_2 + K(a' x_1 x_2 + b' y_1 y_2 + c' z_1 z_2) = 0,$$

égalité qui montre que les points A′ et B′ sont conjugués par rapport à la conique $\Sigma' = S + KS' = 0$.

Dès lors, la droite AB est coupée harmoniquement par les coniques Σ et Σ′, et par suite a pour enveloppe une conique. Cette conique a pour équation tangentielle

$$(1) \qquad bcu^2 + cav^2 + abw^2 = K^2(b'c'u^2 + c'a'v^2 + a'b'w^2).$$

De même, en exprimant que les tangentes à S, S′, aux points A et B, sont conjuguées par rapport à la conique

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = \frac{1}{K}\left(\frac{u^2}{a'} + \frac{v^2}{b'} + \frac{w^2}{c'}\right),$$

on obtiendra l'équation ponctuelle du deuxième lieu

$$(2) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 = \frac{abc}{K^2 a'b'c'}(a'x^2 + b'y^2 + c'z^2);$$

c'est une conique du faisceau (S, S′, Σ). Réciproquement si C, S, S′ sont trois coniques d'un faisceau ponctuel, et que d'un point M de l'une d'elles (C) on mène des tangentes MA, MB aux deux autres, les points A et B sont conjugués par rapport à l'une ou l'autre des coniques $\Sigma_1 = S - KS' = 0$, $\Sigma_2 = S + KS' = 0$.

La valeur de K se détermine en identifiant l'équation (2) avec l'équation de la conique C.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

Si quatre coniques (S, S', S'', Σ) *d'un faisceau ponctuel sont telles qu'il existe un triangle conjugué par rapport à l'une d'elles* Σ, *et dont les sommets soient situés respectivement sur les trois autres, il en existe une infinité.*

Soient en effet

$$\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$
$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$
$$S' = (a + K)x^2 + (b + K)y^2 + (c + K)z^2 = 0,$$
$$S'' = (a + K')x^2 + (b + K')y^2 + (c + K')z^2 = 0,$$

et ABC un triangle remplissant les conditions de l'énoncé. Si le point A (x_1, y_1, z_1) se trouve sur la conique S, on a

$$(3) \qquad ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 = 0,$$

et la droite BC a pour équation

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0.$$

Mais, d'après ce qui précède, elle est tangente à la conique dont l'équation tangentielle est

$$[(b + K)(c + K) - (b + K')(c + K')]u^2 + \ldots = 0,$$

ou

$$(b + c + K + K')u^2 + \ldots = 0.$$

On a donc

$$(4) \qquad (b + c + K + K')x_1^2 + \ldots = 0.$$

En ajoutant les équations (3) et (4), il vient

$$(a + b + c + K + K')(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0$$

ou

$$(5) \qquad a + b + c + K + K' = 0,$$

car $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ n'est pas nul, puisque A n'est pas un point commun aux coniques du faisceau. Cette dernière relation étant indépendante du point A considéré, le théorème est démontré. Il y a plus, les sommets du triangle dont les côtés touchent respectivement les coniques S, S′, S″ aux points A, B, C appartiennent à une conique fixe (E) du faisceau. En effet, les points de rencontre des tangentes à S et à S′ aux points A et B a pour lieu la conique

$$(a + \mathrm{K})x^2 + \ldots = \frac{(a + \mathrm{K})(b + \mathrm{K})(c + \mathrm{K})}{abc}[ax^2 + \ldots]$$

ou

$$(6) \qquad a(a + \mathrm{K})(a + \mathrm{K}')x^2 + \ldots = 0,$$

en tenant compte de la relation (5). Il est clair qu'on trouverait le même lieu pour les autres sommets. Plus généralement, si l'équation de (Σ) est de la forme

$$(a + l)x^2 + \ldots = 0,$$

la conique (E) est représentée par

$$\frac{a(a + \mathrm{K})(a + \mathrm{K}')}{(a + l)^2}x^2 + \ldots = 0.$$

Réciproquement, soient (S, S′, Σ) trois coniques d'un faisceau ponctuel, si deux sommets d'un triangle conjugué par rapport à Σ décrivent respectivement les coniques S, S′, le troisième sommet resté libre décrit une conique S″ du faisceau précédent.

Ces propriétés nous conduisent presque immédiatement à la proposition suivante, qui est due à Chasles :

Étant données trois coniques (S, S′, E) *d'un faisceau ponctuel, si un triangle* LMP *inscrit dans la conique* (E) *se déforme de manière que deux de ses côtés restent respectivement tangents aux coniques* S, S′, *le*

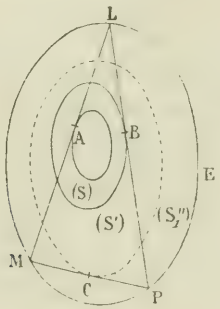
troisième côté a pour enveloppe deux coniques du faisceau.

Soient

$$E = x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$
$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$
$$S' = (a + K)x^2 + (b + K)y^2 + (c + K)z^2 = 0$$

les équations des trois coniques.

Du point L, pris sur la première, menons les tangentes LA, LB aux deux autres. Les points A et B sont



conjugués par rapport à l'une des coniques Σ_1, Σ_2, soit Σ_1 par exemple. Cela étant, désignons par C le pôle de AB par rapport à cette conique. Lorsque le point L décrit la conique (E) le point C se déplace sur une conique (S''_1) du faisceau, car le triangle ABC est conjugué par rapport à Σ_1; de plus les tangentes en A, B, C aux coniques S, S', S''_1 se coupent aux points L, M, P situés sur une conique du faisceau.

Comme cette conique n'est autre que (E) elle-même, le théorème est démontré. Rien de plus simple, dès lors, que d'obtenir les équations des enveloppes S''_1, S''_2. Repré-

sentons en effet par

$$\Sigma_1 = (a+l)x^2 + (b+l)y^2 + (c+l)z^2 = 0,$$
$$S''_1 = (a+K')x^2 + (b+K')y^2 + (c+K')z^2 = 0,$$

les équations des coniques (Σ_1), (S''_1).

D'après les calculs précédents, l'équation de la conique (E) est de la forme

$$0 = \frac{a(a+K)(a+K')}{(a+l)^2}x^2 + \frac{b(b+K)(b+K')}{(b+l)^2}y^2 + \frac{c(c+K)(c+K')}{(c+l)^2}z^2,$$

d'où les relations

$$\frac{a(a+K)(a+K')}{(a+l)^2} = \frac{b(b+K)(b+K')}{(b+l)^2} = \frac{c(c+K)(c+K')}{(c+l)^2}.$$

Pour éliminer l entre ces équations, désignons par ρ la valeur commune de ces rapports.

L'expression $\frac{x(x+K)(x+K')}{(x+l)^2} - \rho$ s'annulant pour les valeurs a, b, c attribuées à x, on a identiquement

$$\frac{x(x+K)(x+K')}{(x+l)^2} - \rho = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x+l)^2},$$

ou

$$x(x+K)(x+K') - \rho(x+l)^2 = (x-a)(x-b)(x-c);$$

en identifiant, on trouve

$$K + K' + a + b + c = \rho,$$
$$abc = \rho l^2$$

et

$$[KK' - (ab+bc+ca)]^2 = 4abc(K+K'+a+b+c),$$

équation qui donne deux valeurs pour K', comme on devait s'y attendre.

Dans le cas particulier où $K = K' = 0$, les trois coniques S, S', S'' se confondent; l'égalité précédente

devient

$$(ab + bc + ca)^2 \quad 4abc(a + b + c) = 0.$$

C'est la relation connue

$$\Theta'^2 \quad 4\Delta'\Theta = 0,$$

exprimant qu'il existe un triangle inscrit dans (E) et circonscrit à (S).

SUR LES CUBIQUES UNICURSALES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Dans une Note précédente (*Sur les points d'une conique situés sur un même cercle*), nous avons montré que plusieurs des théorèmes donnés par M. Balitrand et nous-même sur la strophoïde s'étendaient à toutes les cubiques circulaires unicursales. Nous allons compléter ces résultats en montrant que tous les théorèmes sur la strophoïde s'appliquent, à un degré plus général, aux cubiques unicursales circulaires (et même pour quelques-unes non altérées par la projection, aux cubiques unicursales non circulaires).

Définitions. — (*a*) Les cubiques circulaires unicursales sont les inverses des coniques, le point double étant au centre d'inversion, P, placé sur la conique, et les tangentes au point double étant parallèles aux asymptotes de la conique. Les cubiques acnodales sont les inverses de l'ellipse; les cubiques crunodales sont les inverses de l'hyperbole.

(*b*) Les cordes supplémentaires d'une conique sont parallèles aux systèmes de diamètres conjugués; il en résulte que ces cordes, issues d'un même point P,

forment un faisceau harmonique avec les parallèles aux asymptotes menées par le point P. Ainsi :

A deux points diamétralement opposés d'une conique correspondent sur la cubique inverse deux points que nous appellerons points conjugués et qui sont tels que les droites les joignant au point double forment un faisceau harmonique avec les tangentes en ce point.

Plus généralement nous appellerons *points conjugués* sur une cubique unicursale quelconque deux points tels que les droites les joignant au point double forment un faisceau harmonique avec les tangentes en ce point.

(*c*) A un cercle tangent en P à la conique correspond une parallèle à l'asymptote de la cubique circulaire unicursale. D'après un théorème connu, les droites PC, PD joignant le point P aux points d'intersection de la conique avec le cercle ω sont également inclinées sur les axes et par suite sur les asymptotes. Donc :

Théorème. — *Les vecteurs des points d'intersection d'une cubique circulaire unicursale avec une parallèle à l'asymptote sont également inclinés sur les tangentes au point double.*

Nous appellerons ces points, qui n'existent que dans les cubiques unicursales circulaires, *points correspondants* (définition donnée pour la strophoïde par M. Enrique Valdès).

Nous allons maintenant énoncer un certain nombre de théorèmes en les divisant en deux groupes : 1° ceux qui ne sont pas altérés par la projection et s'appliquent à toutes les cubiques unicursales; 2° les théorèmes particuliers aux cubiques unicursales circulaires. Ces derniers sont obtenus par inversion en partant de théorèmes

connus ou évidents sur les coniques, ou de théorèmes nouveaux obtenus par le même procédé de démonstration dont nous nous sommes servi dans notre Note *Sur les points concycliques d'une conique*. Nous ne reviendrons pas sur les théorèmes relatifs aux cubiques unicursales circulaires déjà énoncés dans cette Note.

I. — Théorèmes s'appliquant a toutes les cubiques unicursales.

1. *Les droites joignant le point double à tous les points conjugués forment un faisceau en involution dont les rayons doubles sont les tangentes au point double.*

Corollaires. — 1° Dans la strophoïde, les points cycliques sont conjugués. De là résultent les propriétés particulières de cette cubique de la famille.

2° En projetant une cubique unicursale de façon que deux points conjugués deviennent les points cycliques, la projection est une strophoïde. Deux points conjugués restent conjugués.

2. *Les droites joignant un point* M *quelconque d'une cubique unicursale à tous les points conjugués forment un faisceau involutif dont l'un des rayons doubles est la droite joignant le point* M *au point double.*

Corollaire. — Dans la strophoïde, les droites isotropes faisant partie du faisceau, le rayon double MO bissecte les couples de rayons homologues du faisceau.

3. *Si trois points d'une cubique unicursale sont collinéaires, l'un d'eux et les conjugués des deux autres sont également collinéaires.*

4. *Deux points conjugués ont le même tangentiel* (¹).

5. *Le collinéaire de deux points conjugués est conjugué de leur tangentiel.*

Appelons *cordes polaires* d'une cubique unicursale les droites joignant les couples de points conjugués.

6. *La droite joignant le collinéaire de deux points conjugués à leur tangentiel est une droite polaire.*

7. *Soient* (A, B), (A′, B′) *deux couples quelconques de points conjugués d'une cubique unicursale. Les droites* AA′, BB′ *se coupent en* I *sur la cubique; les droites* AB′ *et* A′B *se coupent en* I′ *sur la cubique; les points* I *et* I′ *sont conjugués.*

Corollaire. — Tout quadrilatère complet inscrit dans une cubique unicursale est un quadrilatère dont les sommets opposés sont conjugués.

Dans la strophoïde, ce quadrilatère est de plus circonscriptible à un cercle ayant pour centre le point double.

8. *L'enveloppe des cordes polaires d'une cubique unicursale est une conique tangente aux tangentes au point double* (²).

9. *Une corde polaire rencontrant une corde polaire fixe* Δ *au point* L, *le lieu du conjugué harmonique de* L *par rapport aux deux points conjugués de la cubique*

(¹) La réciproque est vraie; elle résulte d'ailleurs d'un théorème donné par M. Astor dans les *Nouvelles Annales* de juillet 1892.

(²) On retrouve un théorème de M. Astor (*loc. cit.*, p. 280).

située sur la corde considérée est une droite passant par le point double.

II. — Théorèmes particuliers aux cubiques unicursales circulaires.

10. *Les cercles circonscrits aux triangles formés par le point double et deux points conjugués quelconques passent par un point fixe qui est le symétrique du point double par rapport au conjugué du point réel à l'infini.*

11. *Les cercles circonscrits aux triangles formés par deux points conjugués et leur tangentielle passent par le conjugué du point réel à l'infini.*

12. *Les points situés sur les bissectrices des tangentes au point double sont en ligne droite avec le conjugué du point réel à l'infini* [1]. *En ces points la tangente est parallèle à l'asymptote* (corollaire de la proposition 5).

13. *Les tangentiels de quatre points concycliques sont concycliques.*

14. *Les conjugués de quatre points concycliques sont concycliques.*

15. *Les conjugués de trois points collinéaires sont concycliques avec le point de section de l'asymptote réelle.*

16. *Si quatre points sont concycliques, deux de ces*

---

[1] Ce point F est le point de rencontre de la cubique avec la droite conjuguée harmonique de la parallèle à l'asymptote menée par le point double par rapport aux tangentes au point double.

points et les conjugués des deux autres sont également concycliques.

1° Les cercles osculateurs à une conique en deux points diamétralement opposés rencontrent de nouveau la conique en deux points diamétralement opposés.	17. *Les cercles osculateurs à une cubique unicursale circulaire en deux points conjugués rencontrent de nouveau la cubique en deux points conjugués.*
2° (Centre d'inversion en l'un des points diamétralement opposés.)	18. *Le cercle osculateur au conjugué du point réel à l'infini rencontre la cubique au conjugué du point de section.*
1° Par deux points pris sur une conique on peut mener deux cercles tangents à la conique; les points de contact sont diamétralement opposés.	19. *Par deux points pris sur une cubique unicursale circulaire on peut mener deux cercles tangents à la cubique, les points de contact sont conjugués.*
2° (Centre d'inversion en l'un des points).	20. *Réciproque du théorème 4.*

21. *La corde de contact d'un cercle bitangent à une cubique unicursale circulaire passe par l'un des points où la tangente est parallèle à l'asymptote, etc.*

La majorité des théorèmes énoncés (p. 251 à 258 du numéro de juillet) par M. Valdès sur la strophoïde ne s'appliquent pas à cette seule courbe, mais s'étendent de même à toutes les cubiques unicursales circulaires (en particulier les propriétés des points correspondants).

NOTES.

A. Les théorèmes que nous avons énoncés dans le numéro de juillet sur les *cycliques équilatères*

s'étendent de même à toutes les *cycliques unicursales*. Il n'y a guère que le théorème énoncé page 276 qui soit particulier à cette classe de cycliques. Le point ω, pour les cycliques unicursales, est de même celui qui correspond, dans l'inversion, au centre de la conique.

B. Les polaires réciproques des cubiques unicursales sont des quartiques à trois rebroussements. Appelons *tangentes conjuguées* à ces quartiques deux tangentes dont les points de rencontre avec la tangente double sont conjugués harmoniques des points de contact de la tangente double avec la quartique. Nous aurons les théorèmes suivants :

Les points de rencontre d'une tangente quelconque à une quartique tricuspidale avec tous les couples de tangentes conjuguées forment une involution dont l'un des points doubles est le point de rencontre de la tangente considérée avec la tangente double.

Corollaire. — Si d'un point quelconque pris sur le cercle inscrit dans un hypocycloïde à trois rebroussements on mène les deux tangentes rectangulaires à la courbe, les segments interceptés sur une tangente fixe quelconque à l'hypocycloïde ont le même milieu.

Le lieu des points de rencontre des tangentes conjuguées est une conique passant par les deux points de contact de la tangente double.

Si d'un point on mène les trois tangentes à une quartique tricuspidale, l'une d'elles et les conjuguées des deux autres sont concourantes.

La droite joignant les points de contact de deux tangentes conjuguées est tangente à la quartique.

Si deux tangentes sont conjuguées, la troisième tangente que l'on peut mener à la quartique par leur

point de concours est conjuguée de la droite joignant les points de contact des deux premières.

Dans le cas particulier où la tangente double est la droite de l'infini et les points de contact les points cycliques (hypocycloïde à trois rebroussements), les théorèmes précédents permettent de retrouver des propositions connues.

Enfin, en transformant le théorème 7, on obtient la proposition suivante :

Soient (D, D′), (Δ, Δ′) *deux couples quelconques de tangentes conjuguées à une quartique tricuspidale. La droite joignant les points d'intersection des tangentes* (D, Δ), (D′, Δ′) *est tangente à la quartique. La droite joignant les points d'intersection des tangentes* (D, Δ′) *et* (D′, Δ) *est également tangente à la quartique. De plus, ces deux droites sont des tangentes conjuguées.*

BIBLIOGRAPHIE.

Les fonctions elliptiques et leurs applications, par M. *Alfred-George Greenhill*, professeur au collège d'Artillerie de Woolwich, traduit de l'anglais par M. *J. Griess*, professeur agrégé de Mathématiques au lycée d'Alger, avec une préface de M. *P. Appell*, membre de l'Institut. Paris, Georges Carré; 1895. Grand in-8° de xviii-574 pages avec 28 figures dans le texte. Prix : 18fr.

Le goût naturel et l'éducation de beaucoup d'étudiants français les portent, quelquefois avec excès, vers les idées gérales. Pour ne parler que de Mathématiques, quel professeur

n'a rencontré des élèves de nos écoles et de nos lycées parfaitement instruits des théories générales et incapables d'en faire une application précise cependant très facile; possédant, par exemple, la notion d'intégrale définie dans toute sa rigueur sans savoir effectuer les quadratures les plus élémentaires.

Il est utile que quelques Ouvrages viennent réagir contre ces tendances ; pour cela, on ne peut trouver mieux que les livres anglais, dans la plupart desquels les idées générales sont amenées peu à peu par l'étude des faits mathématiques ou des questions posées par les Sciences physiques. C'est à ce titre que se recommande l'Ouvrage de M. Greenhill, dont on ne peut mieux caractériser l'esprit qu'en reproduisant la pensée de Fourier qui lui sert d'introduction :

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue; elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver. Ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels. »

M. Greenhill se place ainsi à un tout autre point de vue que les auteurs des excellents Traités français sur les fonctions elliptiques : Briot et Bouquet, Halphen, MM. J. Tannery et Molk. Il renonce aux avantages d'unité et d'enchaînement logique que ces auteurs obtiennent en établissant d'abord, par des considérations générales ordinairement empruntées à la théorie moderne des fonctions, les formules et les théorèmes relatifs aux fonctions elliptiques, pour les appliquer ensuite à la Mécanique, à la Physique mathématique, à la Géométrie, à l'Arithmétique; mais il trouve, en revanche, l'avantage bien précieux d'intéresser immédiatement le lecteur qui n'est pas un pur mathématicien, en lui fournissant, dès les premières pages, de belles et importantes applications des fonctions elliptiques.

L'Auteur suit en cela une méthode d'exposition analogue à celle de M. Hermite, qui, dans son beau Mémoire *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, commence par montrer comment un problème sur la chaleur conduit aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

M. Greenhill, en traitant d'abord des questions entièrement élémentaires, montre de même que les fonctions elliptiques s'imposent à l'Analyse pour la résolution de problèmes simples de Mécanique, Géométrie, Physique mathématique. Il commence par les anciennes méthodes de Legendre, Abel, Jacobi, en partant de la notion de l'intégrale elliptique et de la fonction inverse; il ne suppose donc chez le lecteur aucune connaissance sur la théorie générale des fonctions, ni sur la théorie particulière des fonctions elliptiques: et il l'amène peu à peu, par l'étude de problèmes élégamment choisis, sans caractère artificiel, à posséder tous les points essentiels du sujet.

La traduction de M. Griess n'est pas entièrement conforme à l'édition anglaise : M. Greenhill en a augmenté l'intérêt par des remaniements et d'importantes additions. Voici une analyse sommaire de l'Ouvrage.

Le livre débute par l'étude des oscillations du pendule simple; les expressions des coordonnées de l'extrémité du pendule en fonction du temps conduisent à la définition analytique des fonctions elliptiques d'une variable réelle et à leurs représentations géométriques et mécaniques. La périodicité du mouvement pendulaire conduit naturellement à la notion de la période réelle des fonctions elliptiques sn, cn, dn et aux formules donnant les valeurs de ces fonctions, quand on ajoute à l'argument la demi-période. La période imaginaire est ensuite introduite et interprétée mécaniquement, comme le produit de i par la période de l'oscillation d'un pendule décrivant l'arc supérieur du même cercle, sous l'action de la pesanteur changée de sens; c'est là une première addition à l'édition anglaise.

Après une courte digression sur la dégénérescence des fonctions elliptiques en fonctions circulaires ou hyperboliques, l'auteur revient au mouvement pendulaire, et par la comparaison des mouvements de deux pendules, dont l'un fait des révolutions complètes, tandis que l'autre exécute des oscillations, il établit les formules qui correspondent à l'échange de module avec son inverse.

Puis, viennent quelques applications élégantes, surfaces minima, équation d'Euler, destinées à graver les premières formules dans l'esprit du lecteur.

Dans le second Chapitre, l'auteur considère les intégrales elliptiques de toutes les formes possibles; il donne leurs valeurs

au moyen des fonctions elliptiques inverses; il introduit la notation de Weierstrass, quand le polynome sous le radical est du troisième degré.

Ces premières notions, dans le cas de la variable réelle, suffisent pour l'intelligence des applications géométriques et mécaniques auxquelles est consacré le Chapitre III. La variété des problèmes choisis en rend la lecture très intéressante, et contribue à familiariser le lecteur avec le maniement des formules.

Le Chapitre IV traite du théorème d'addition. Ce dernier est encore rattaché au mouvement simultané de deux pendules en retard l'un sur l'autre; l'auteur en déduit la construction de Jacobi, et une application des plus intéressantes à la construction des polygones de Poncelet, inscrits à un cercle et circonscrits à un autre. M. Greenhill, après avoir très heureusement modifié et complété la partie relative aux pentagones, montre comment ces résultats peuvent être identifiés avec ceux qu'Halphen a trouvés dans le deuxième Volume de son *Traité*, et donne quelques théorèmes nouveaux. Une dernière application se rapporte à la Trigonométrie sphérique et conduit au Tableau des trente-trois formules données par Jacobi dans ses *Fundamenta*.

Le Chapitre V envisage le théorème d'addition sous forme algébrique; sa lecture suppose la connaissance d'un certain nombre de théorèmes d'Algèbre supérieure relatifs à la théorie des formes.

Le Chapitre suivant conduit aux intégrales de deuxième et troisième espèces et aux fonctions $Z(u)$ et $\Pi(u, a)$.

Dans le Chapitre VII paraissent les fonctions $\zeta(u)$ et $\sigma(u)$ de Weierstrass. Elles servent à compléter la solution de problèmes qui n'avaient pu être terminés précédemment (chaînette en rotation, élastique gauche algébrique, pendule sphérique, toupie). Le théorème d'addition pour les intégrales elliptiques de troisième espèce est établi par une extension de la méthode d'Abel, précédemment employée : elle conduit tout naturellement à la considération des intégrales pseudo-elliptiques. Toute cette partie a été profondément remaniée par M. Greenhill; les calculs ont été plus développés et appliqués à la détermination de certaines herpolhodies algébriques (déjà faite par Halphen), ainsi qu'à l'élastique gauche.

La double périodicité des fonctions elliptiques est mise en évidence par la considération des ovales de Descartes (Cha-

pitre VIII). Puis vient un Chapitre très original, sur les développements des fonctions elliptiques en produits de facteurs et en séries; ces problèmes sont rattachés à des questions de Physique mathématique, et en particulier aux théories électriques de Maxwell.

Le dernier Chapitre se rapporte à la théorie de la transformation. Après l'avoir d'abord rattachée aux considérations physiques du Chapitre précédent, l'auteur reprend la théorie algébrique générale, en suivant la méthode indiquée par Jacobi dans ses *Fundamenta*. Un nombre considérable de résultats sont indiqués dans ce Chapitre.

En résumé, le principal caractère du livre de M. Greenhill est d'intéresser le lecteur aux fonctions elliptiques, en montrant comment leur théorie se rattache à la résolution de toutes sortes de problèmes de Géométrie, de Mécanique, de Physique. Cet Ouvrage rendra de grands services à tous ceux qui désirent étudier cette théorie: aux physiciens et aux ingénieurs, il fournira un instrument de calcul puissant, avec des exemples variés sur la manière de l'appliquer; aux étudiants en Mathématiques, il facilitera l'intelligence des débuts de la théorie et inspirera la curiosité de lire les grands Traités; même pour les candidats à la Licence mathématique et physique, la lecture des cinq premiers Chapitres sera des plus aisées; elle leur apprendra rapidement le maniement des fonctions elliptiques avec les notations de Jacobi et de M. Weierstrass.

Terminons en signalant la façon particulièrement élégante dont M. Greenhill a donné des exemples d'intégrales pseudo-elliptiques, notamment dans le mouvement du pendule conique et dans celui d'un corps pesant autour d'un point fixe : ces exemples sont tirés d'un Mémoire étendu sur les intégrales pseudo-elliptiques que M. Greenhill vient de publier dans les *Proceedings of the London mathematical Society* et qui se rattache directement aux paragraphes correspondants de son livre. Un autre point, sur lequel M. Greenhill a fait des recherches personnelles d'un grand intérêt, est la théorie des équations modulaires; le Mémoire original de l'auteur, cité avec éloge par Halphen, vient d'être traduit par M. Laugel, dans les *Annales de l'École Normale supérieure*.

P. Appell.

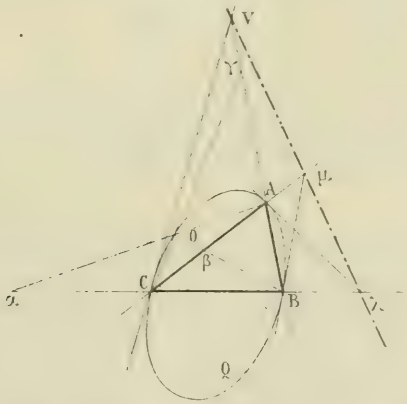
SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES;

PAR M. P. SONDAT.

1. Comme applications d'une Note insérée dans les *Nouvelles Annales* (1893, p. 360), je me propose de démontrer quelques propriétés des coniques.

Je rappelle d'abord que si un point $O(\alpha, \beta, \gamma)$, rapporté, en coordonnées *segmentaires*, à un triangle de

Fig. 1.



référence ABC, appartient à une droite $X(\lambda, \mu, \nu)$, l'équation

$$\frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\beta}{\mu} = 1 \tag{1}$$

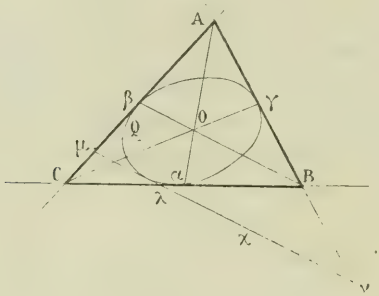
est à la fois celle de X en coordonnées *ponctuelles*, et celle de O en coordonnées *tangentielles*.

Si le point O cesse d'appartenir à X, l'équation

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1 \tag{2}$$

représente aussi, en coordonnées ponctuelles, si X est fixe, la conique Q (*fig.* 1) tangente en A, B, C aux droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$, et, en coordonnées tangentielles, si O est fixe, la conique Q_1 (*fig.* 2) inscrite à ABC en α, β, γ.

Fig. 2.



Nous dirons que la conique Q est circonscrite à ABC selon la droite X, et que la conique Q_1 est inscrite selon le point O.

2. Le lieu du point O pour lequel Q_1 admet la tangente fixe x est la conique Q circonscrite selon cette droite, et, corrélativement, l'enveloppe de X, pour laquelle Q passe par le point fixe O, est la conique Q_1 inscrite selon ce point. Ainsi le lieu du point O, pour lequel Q_1 est une parabole, est l'ellipse circonscrite à ABC selon la droite à l'infini, et l'enveloppe de la droite X, pour laquelle Q passe par le centre de gravité de ABC, est l'ellipse inscrite selon ce centre.

3. Soit $O(\alpha, \beta, \gamma)$ un point lié à la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$ par l'équation

$$(\lambda - \alpha)(\mu - \beta)(\nu - \gamma) + 1 = 0.$$

En vertu des égalités

$$\lambda\mu\nu = +1, \qquad \alpha\beta\gamma = -1,$$

cette équation peut s'écrire

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\beta}{\mu}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}-1\right)=0,$$

et se décompose en celles-ci

$$\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\beta}{\mu}=1, \qquad \frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}=1.$$

Donc (1)

1° Avec X fixe, O appartient à X ou à Q;

2° Avec O fixe, X enveloppe O ou Q_1.

Comme les triangles αCA, βAB, γBC, coupés par les droites $BO\beta$, $CO\gamma$, $AO\beta$, donnent

$$\frac{OA}{O\alpha}=\gamma(1-\alpha), \qquad \frac{OB}{O\beta}=\alpha(1-\beta), \qquad \frac{OC}{O\gamma}=\beta(1-\gamma),$$

le lieu du point O pour lequel

$$OA.OB.OC=O\alpha.O\beta.O\gamma$$

aura pour équation

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+1=0,$$

c'est-à-dire sera, avec la droite à l'infini (111), l'ellipse circonscrite à ABC selon cette droite.

4. Coupons la conique Q par la droite $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ la rencontrant aux points $O(\alpha, \beta, \gamma)$ et $O_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Comme O appartient à X_1 et à Q, on a (1)

$$\frac{\lambda_1}{\alpha}+\frac{\beta}{\mu_1}=1, \qquad \frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}=1,$$

et, en éliminant β,

$$(4) \qquad \alpha^2-\left(\lambda+\lambda_1-\frac{\lambda\mu}{\mu_1}\right)\alpha+\lambda\lambda_1=0.$$

Or les racines de cette équation convenant à O et O_1,

on a

$$(5)\quad \alpha\alpha_1 = \lambda\lambda_1, \qquad \text{et de même} \qquad \beta\beta_1 = \mu\mu_1, \qquad \gamma\gamma_1 = \nu\nu_1.$$

Si X_1 est une tangente, O_1 se confond avec O, et l'on a, pour ce point de contact,

$$(6)\qquad \alpha^2 = \lambda\lambda_1, \qquad \beta^2 = \mu\mu_1, \qquad \gamma^2 = \nu\nu_1,$$

L'équation (2), qui devient alors

$$(7)\qquad \pm\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \pm \sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}} = 1,$$

est celle de Q en coordonnées tangentielles, et exprime, sous sa forme rationnelle

$$(8)\qquad \left(\lambda + \lambda_1 - \frac{\lambda\mu}{\mu_1}\right)^2 - 4\lambda\lambda_1 = 0,$$

que les racines de (4) sont égales.

5. Théorème. — *Si sur la conique* Q, *circonscrite à* ABC *selon la droite* $X(\lambda, \mu, \nu)$, *on prend trois points* $A_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $B_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $C_1(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, *le triangle* $A_1B_1C_1$ *sera circonscrit à la conique* Q_1, *inscrite à* ABC *selon le point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$, *ayant pour coordonnées*

$$\alpha = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\lambda^2}, \qquad \beta = \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\mu^2}, \qquad \gamma = \frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\nu^2}.$$

Soient, en effet, $a_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $b_1(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $c_1(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ les côtés de $A_1B_1C_1$. On a (4)

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_2\alpha_3 = \lambda\lambda_1, & \alpha_1\alpha_3 = \lambda\lambda_2, & \alpha_1\alpha_2 = \lambda\lambda_3, \\ \beta_2\beta_3 = \mu\mu_1, & \beta_1\beta_3 = \mu\mu_2, & \beta_1\beta_2 = \mu\mu_3, \\ \gamma_2\gamma_3 = \nu\nu_1, & \gamma_1\gamma_3 = \nu\nu_2, & \gamma_1\gamma_2 = \nu\nu_3. \end{array}\right.$$

Or le point A_1 appartenant à Q, on a (1)

$$\frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_1} = 1,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\lambda^2} : \frac{\alpha_3\alpha_3}{\lambda} + \frac{\beta_2\beta_3}{\mu} : \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\mu^2} = 1$$

ou

$$\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta} = 1,$$

c'est-à-dire (1) que a_1 enveloppe Q_1.

On prouverait de même que b_1 et c_1 sont des tangentes à Q_1.

Remarque. — Si les points A_1, B_1, C_1 sont ceux où les droites qui joignent un point $\omega(x, y, z)$ de X aux sommets A, B, C, coupent Q, on aura

$$A_1\left(x, \frac{\mu z}{\nu}, \frac{\nu y}{\mu}\right), \quad B_1\left(\frac{\lambda z}{\nu}, y, \frac{\nu x}{\lambda}\right), \quad C_1\left(\frac{\lambda y}{\mu}, \frac{\mu x}{\lambda}, z\right).$$

Il résulte de là que

$$\alpha = -\lambda, \qquad \beta = -\mu, \qquad \gamma = -\nu,$$

ou O est le pôle de X (triangle ABC).

De plus, on a les trois systèmes homologiques

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ C_1 & A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B_1 & C_1 & A_1 \end{vmatrix},$$

dont les centres appartiennent à X, et dont les axes passent par O.

6. Menons à la conique Q_1 les tangentes $X(\lambda, \mu, \nu)$ et $X_1(\lambda_1, \mu, \nu_1)$, partant d'un point $O_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Comme X enveloppe O_1 et Q_1, on a (1)

$$\frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\beta_1}{\mu} = 1, \qquad \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1,$$

et, en éliminant μ,

$$(9) \qquad \lambda^2 - \left(\alpha + \alpha_1 - \frac{\alpha_1\beta_1}{\beta}\right)\lambda + \alpha\alpha_1 = 0,$$

et comme les racines de cette équation conviennent à X et X_1,

$$(10)\quad \lambda\lambda_1 = \alpha\alpha_1, \qquad \text{et de même,} \qquad \mu\mu_1 = \beta\beta_1, \qquad \nu\nu_1 = \gamma\gamma_1.$$

Si O_1 se porte sur Q_1, X_1 se superpose à X, et l'on a, pour cette tangente,

$$(11)\qquad \lambda^2 = \alpha\alpha_1, \qquad \mu^2 = \beta\beta_1, \qquad \nu^2 = \gamma\gamma_1,$$

L'équation (2), qui devient alors

$$(12)\qquad \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}} \pm \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta}} = 1,$$

est celle de Q_1 en coordonnées ponctuelles, et exprime, sous sa forme rationnelle

$$(13)\qquad \left(\alpha + \alpha_1 - \frac{\alpha_1\beta_1}{\beta}\right)^2 - 4\alpha\alpha_1 = 0,$$

que les racines de (9) sont égales.

7. Théorème. — *Si à la conique* Q_1 *inscrite à* ABC *selon le point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$, *on mène trois tangentes* $a_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $b_1(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $c_1(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$, *le trilatère* $a_1 b_1 c_1$ *sera inscrit dans la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon la droite* $X(\lambda, \mu, \nu)$, *ayant pour coordonnées*

$$\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\alpha^2}, \qquad \mu = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\beta^2}, \qquad \nu = \frac{\nu_1\nu_2\nu_3}{\gamma^2}.$$

Soient, en effet, $A_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $B_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $C_1(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les sommets de $a_1 b_1 c_1$. On a (6)

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda_2\lambda_3 = \alpha\alpha_1, & \lambda_1\lambda_3 = \alpha\alpha_2, & \lambda_1\lambda_2 = \alpha\alpha_3, \\ \mu_2\mu_3 = \beta\beta_1, & \mu_1\mu_3 = \beta\beta_2, & \mu_1\mu_2 = \beta\beta_3, \\ \nu_2\nu_3 = \gamma\gamma_1, & \nu_1\nu_3 = \gamma\gamma_2, & \nu_1\nu_2 = \gamma\gamma_3. \end{array}\right.$$

Or la droite a_1 étant tangente à Q_1, on a (1)

$$\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta} = 1.$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\lambda_2\lambda_3}{\alpha} : \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\alpha^2} + \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\beta^2} : \frac{\mu_2\mu_3}{\beta} = 1$$

ou

$$\frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_1} = 1,$$

c'est-à-dire (1) que A_1 est sur Q.

On prouverait de même que B_1 et C_1 appartiennent à Q.

Remarque. — Si a_1, b_1, c_1 sont les tangentes à Q_1, menées par les points où une droite $\rho(x, y, z)$, passant par O, coupe les côtés de ABC, on a

$$a_1\left(x, \frac{\beta z}{\gamma}, \frac{\gamma y}{\beta}\right), \quad b_1\left(\frac{\alpha z}{\gamma}, y, \frac{\gamma x}{\alpha}\right), \quad c_1\left(\frac{\alpha y}{\beta}, \frac{\beta x}{\alpha}, z\right).$$

Il en résulte que $\lambda = -\alpha$, $\mu = -\beta$, $\nu = -\gamma$, ou X est la polaire de O.

De plus, on a les trois systèmes homologiques

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ C_1 & A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B_1 & C_1 & A_1 \end{vmatrix},$$

et il est facile de voir que les trois axes passent par O et que les trois centres se trouvent sur X.

8. Théorème. — *Étant données la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon la droite* $X(\lambda, \mu, \nu)$ *et la conique* Q_1 *inscrite selon le point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$, *il existe une infinité de triangles inscrits dans* Q *et circonscrits à* Q_1.

Soit $A_1B_1C_1$ un triangle inscrit dans Q; il sera circonscrit à Q_1 si l'on a (théorème V),

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha\lambda^2, \qquad \beta_1\beta_2\beta_3 = \beta\mu^2, \qquad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma\nu^2.$$

Or les deux dernières conditions se réduisent, en vertu

des équations de Q, à la suivante

$$\nu\beta(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)=\lambda^2.$$

On peut donc se donner à volonté α_1, c'est-à-dire le point A_1, et si l'on détermine α_2 et α_3 par l'équation précédente et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\alpha\lambda^2$, le triangle $A_1B_1C_1$ sera circonscrit à Q_1.

9. Théorème. — *Si une droite* $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ *est tangente à la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon la droite fixe* $X(\lambda, \mu, \nu)$, *le pôle* $O_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *de* X *par rapport à* ABC *appartient à la conique* Q_1 *inscrite selon le pôle* $O(\alpha, \beta, \gamma)$ *de* X_1; *de plus, le point de contact* ω *de* X_1 *est le pôle de la tangente* ρ *en* O_1.

En effet, comme X_1 est une tangente à Q, on a (4)

$$\pm\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}}\pm\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}}=1.$$

et puisque

$$\lambda=-\alpha_1,\qquad \mu=-\beta_1,\qquad \lambda_1=-\alpha_1,\qquad \mu_1=-\beta_1,$$

il vient, en remplaçant,

$$(14)\qquad \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}\pm\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta}}=1,$$

ou (6) O_1 est sur Q_1.

D'ailleurs, si $\rho(x, y, z)$ est la tangente à Q_1 en O_1, on a (1)

$$\frac{-\lambda_1}{x}+\frac{y}{-\mu_1}=1,\qquad \frac{x}{-\lambda}+\frac{-\mu}{y}=1,$$

d'où

$$\frac{\lambda_1}{-x}+\frac{-y}{\mu_1}=1,\qquad \frac{-x}{\lambda}+\frac{\mu}{-y}=1.$$

Donc (1), le point $(-x, -y, -z)$, pôle de ρ, se trouve sur X_1 et sur Q ou se confond avec le point de contact ω.

Remarque I. — Comme O_1 est fixe, O décrit la quartique (14).

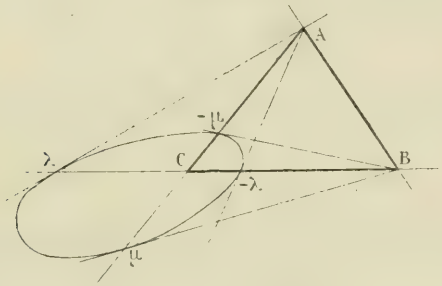
Remarque II. — On aura le théorème corrélatif en supposant le point O fixe ainsi que Q_1, et le point O_1 mobile sur Q_1.

10. Conique rapportée à l'un de ses triangles conjugués. — Son équation est

$$\frac{\lambda^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\mu^2} = 1, \tag{15}$$

car cette conique (*fig.* 3) coupe BC et CA aux points conjugués harmoniques $\pm\lambda$, $\pm\mu$. De plus, les droites

Fig. 3.



qui joignent A et B à ces points sont des tangentes, puisque, pour $\alpha = \pm\lambda$, les deux valeurs de β sont nulles, et pour $\beta = \pm\mu$ les deux valeurs de α sont infinies.

Si, comme au n° 4, on écrit qu'une droite $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ est une tangente, on aura pour les coordonnées du point de contact

$$\alpha\lambda_1 = \lambda^2 \qquad \beta\mu_1 = \mu^2, \qquad \gamma\nu_1 = \nu^2, \tag{16}$$

et l'équation (15), qui devient

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} + \frac{\mu^2}{\mu_1^2} = 1, \tag{17}$$

est alors celle de la conique en coordonnées tangentielles.

Si AB passe à l'infini, C devient le milieu de chacun des segments $(\lambda, -\lambda)$, $(\mu, -\mu)$, et les droites $A\lambda$, $B\mu$ restent tangentes. Le sommet de l'angle C est alors le centre et les côtés prennent les directions de deux diamètres conjugués.

Si l'on désigne par $2a$, $2b$ les longueurs de ces diamètres, par x et y les coordonnées cartésiennes d'un point de la courbe, on aura

$$\lambda = \frac{x}{a}, \qquad \mu = \frac{b}{x}, \qquad \alpha = \frac{x}{x}, \qquad \beta = \frac{y}{x},$$

et l'équation (15) prendra la forme connue

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation (17) devient aussi

$$\frac{a^2}{x_1^2} + \frac{b^2}{y_1^2} = 1, \tag{18}$$

x_1 et y_1 étant les longueurs $C\lambda_1$, $C\mu_1$, qui seraient les coordonnées cartésiennes de la tangente mobile X_1.

De plus, $O(x, y)$ étant le point de contact, les relations (16) donnent

$$xx_1 = a^2, \qquad yy_1 = b^2.$$

11. Polaire d'un point par rapport à Q.

Théorème. — *Étant donnés la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon la droite* $X(\lambda, \mu, \nu)$ *et le point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$, *les droites qui joignent deux à deux les points* $(.\mu\gamma)$ *et* $(.\beta\nu)$, $(\lambda.\gamma)$ *et* $(\alpha.\nu)$, $(\lambda\beta.)$ *et* $(\alpha\mu.)$ *forment un triangle* $A_1B_1C_1$ *homologique avec* ABC, *et l'axe* ρ *d'homologie est la polaire de* O *par rapport à* Q.

Les droites a_1, b_1, c_1 coupent, en effet, les côtés BC, CA, AB aux points

$$(19)\quad x = \frac{\mu - \beta}{\mu\beta(\gamma - \nu)}, \qquad y = \frac{\nu - \gamma}{\nu\gamma(\alpha - \lambda)}, \qquad z = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda\alpha(\beta - \mu)},$$

et, comme $xyz = +1$, ces trois points sont situés sur une droite $\rho(x, y, z)$.

Or, si les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ coupent Q en A_2, B_2, C_2, on a (1), pour le point A_2,

$$\alpha, \quad \frac{1}{\nu(\lambda - \alpha)}, \quad \frac{\nu(\alpha - \lambda)}{\alpha},$$

et (4), pour la tangente en A_2,

$$\frac{\alpha^2}{\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\nu(\lambda - \alpha)^2}, \quad \frac{\nu(\lambda - \alpha)^2}{\alpha^2}.$$

Cette tangente coupe $A\lambda$ au point

$$\mathrm{I} \qquad \lambda, \quad \frac{\mu(\lambda + \alpha)}{\lambda - \alpha}, \quad \frac{\nu(\alpha - \lambda)}{\lambda + \alpha}.$$

De même les tangentes en B_2 et C_2 coupent $B\mu$ et $C\nu$ aux points

$$\mathrm{H} \qquad \frac{\lambda(\beta - \mu)}{\mu + \beta}, \quad \mu, \quad \frac{\nu(\mu + \beta)}{\mu - \beta},$$

$$\mathrm{K} \qquad \frac{\lambda(\nu + \gamma)}{\nu - \gamma}, \quad \frac{\mu(\gamma - \nu)}{\nu + \gamma}, \quad \nu.$$

Il résulte de ces valeurs que les points I, H, K, qui fixent la polaire de O, appartiennent à la droite ρ.

Remarque I. — On peut donc (avec la règle) construire la polaire de O, sans qu'il soit nécessaire de tracer la conique Q.

Remarque II. — Si $x = y = z = 1$, O est le centre

de Q, et les formules (19) donnent, pour ce centre,

$$(20)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda(1-\lambda+\lambda\mu)}{1-\lambda-\lambda\mu}, \\ \beta = \dfrac{\mu(1-\mu+\mu\nu)}{1-\mu-\mu\nu}, \\ \gamma = \dfrac{\nu(1-\nu+\lambda\nu)}{1-\nu-\lambda\nu}. \end{cases}$$

12. Théorème. — *Si les droites qui joignent un point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$ *de la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon la droite* $X(\lambda, \mu, \nu)$, *aux points* λ, μ, ν, *coupent la conique en* A_1, B_1, C_1, *le triangle* $A_1B_1C_1$ *est homologique avec* ABC; *le centre* ω *d'homologie est le point où la tangente* X *touche la conique* Q_1 *inscrite selon le point* O, *et l'axe* ρ, *qui est la polaire de* ω *par rapport à* Q, *tourne autour du point* O_1, *pôle de* X *par rapport à* ABC.

En effet, d'après (4), l'une des coordonnées de A_1 est $\lambda^2 : \alpha$, et on aura les autres par l'équation (2). De même, pour B_1 et C_1. On trouve ainsi

$$\begin{cases} A_1 & \dfrac{\lambda^2}{\alpha}, & \dfrac{1}{\lambda\gamma}, & \dfrac{1}{\lambda\beta}, \\ B_1 & \dfrac{1}{\mu\gamma}, & \dfrac{\mu^2}{\beta}, & \dfrac{1}{\mu\alpha}, \\ C_1 & \dfrac{1}{\nu\beta}, & \dfrac{1}{\nu\alpha}, & \dfrac{\nu^2}{\gamma}. \end{cases}$$

Les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont donc concourantes au point

$$\omega\left(\frac{\lambda^2}{\alpha}, \frac{\mu^2}{\beta}, \frac{\nu^2}{\gamma}\right),$$

et ce point, qui appartient à X pour vérifier son équation (1), est de plus (6) le point où X touche Q_1.

Les côtés de $A_1B_1C_1$ coupent les côtés correspondants

de ABC aux points

$$x = -\alpha, \qquad y = -\beta, \qquad z = -\gamma,$$

et ces points sont situés sur la droite $\rho(-x, -y, -z)$, polaire de O par rapport à ABC.

Comme on a

$$\frac{-\alpha}{-\lambda} + \frac{-\mu}{-\beta} = 1,$$

cette droite ρ passe par le point $O(-\lambda, -\mu, -\nu)$, pôle de X (triangle ABC); elle est de plus polaire de ω (conique Q), car les relations (1), qui lient le point à sa polaire, se trouvent vérifiées.

13. Théorème. — *Le lieu des centres* $\omega(x, y, z)$ *de la conique* Q_1 *inscrite à* ABC *selon le point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$, *mobile sur la droite fixe* $X(\lambda, \mu, \nu)$, *est une conique.*

Comme O appartient à X, on a (1)

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1.$$

Or (formule 22),

$$\alpha = \frac{1 + x - xy}{1 + x + xy}, \qquad \beta = \frac{1 + x + xy}{-1 + x + xy}.$$

En remplaçant, il vient

$$\begin{aligned}[(\lambda\mu + \mu - 1)y^2 + 2\lambda\mu y + (1 + \lambda\mu - \mu)]x^2 \\ - 2(\mu y - 1)x + (1 + \mu - \lambda\mu) = 0.\end{aligned}$$

Cette équation est celle d'une conique Q_2 qui coupe les côtés BC, CA, AB aux points qui sont les racines des équations

$$(1 + \lambda\mu - \mu)x^2 - 2x + (1 + \mu - \lambda\mu) = 0,$$
$$(\lambda\mu + \mu - 1)y^2 + 2\lambda\mu y + (1 + \lambda\mu - \mu) = 0,$$
$$(1 + \mu - \lambda\mu)z^2 + 2\mu z + (\lambda\mu + \mu - 1) = 0.$$

c'est-à-dire en leurs milieux et aux points

$$x_1 = \frac{\lambda\mu - \mu - 1}{\lambda\mu - \mu + 1}, \qquad y_1 = \frac{\mu - 1 - \lambda\mu}{\lambda\mu + \mu - 1}, \qquad z_1 = \frac{1 - \mu - \lambda\mu}{1 + \mu - \lambda\mu}.$$

Or, si Q_3 est la conique inscrite ayant pour centre $\omega_1(-\lambda^{-1}, -\mu^{-1}, -\nu^{-1})$, cette conique est inscrite à ABC selon le point $O_1(x_1, y_1, z_1)$.

Remarque I. — Si X passe à l'infini, on a

$$x_1 = y_1 = z_1 = -1,$$

et Q_2 devient l'ellipse inscrite selon le centre de gravité.

Remarque II. — Si $\lambda = \frac{b^2}{c^2}$, $\mu = \frac{c^2}{a^2}$, $\nu = \frac{a^2}{b^2}$, ou si X est la droite isotomique de celle suivant laquelle le cercle est circonscrit à ABC, ω_1 devient le point de Lemoine, O_1 est l'orthocentre et Q_2 est le cercle des neuf points.

14. Pôle d'une droite par rapport à la conique Q_1.

Théorème. — *Étant données la conique* Q_1 *inscrite à* ABC *selon le point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$ *et la droite* $\rho(\lambda, \mu, \nu)$, *si l'on appelle* A_1, B_1, C_1 *les points* $(\mu\gamma, \nu\beta)$, $(\lambda\gamma, \nu\alpha)$, $(\lambda\beta, \mu\alpha)$, *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *seront concourantes en un point* ω, *pôle de* ρ *par rapport à* Q_1.

En effet, les coordonnées des droites AA_1, BB_1, CC_1 sont

$$(21)\quad x = \frac{\nu - \gamma}{\nu\gamma(\mu - \beta)}, \qquad y = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda\alpha(\nu - \gamma)}, \qquad z = \frac{\mu - \beta}{\mu\beta(\lambda - \alpha)},$$

et comme $xyz = -1$, ces droites sont concourantes en un point $\omega(x, y, z)$.

Or, si l'on mène à Q_1 les tangentes λI, μH, νK, on

aura, pour λ_1,

$$\lambda, \quad \frac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda}, \quad \frac{1}{\beta(\lambda-\alpha)},$$

et (6), pour le point de contact I,

$$\frac{\lambda^2}{\alpha}, \quad \frac{\beta(\lambda-\alpha)^2}{\lambda^2}, \quad \frac{-\alpha}{\beta(\lambda-\alpha)^2}.$$

On en déduit, pour αI,

$$\alpha, \quad \frac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda+\alpha}, \quad \frac{\gamma(\lambda+\alpha)}{\alpha-\lambda}.$$

On aurait de même pour βH et γK,

$$\frac{\alpha(\mu+\beta)}{\beta-\mu}, \quad \beta, \quad \frac{\gamma(\mu-\beta)}{\mu+\beta},$$

$$\frac{\alpha(\nu-\gamma)}{\nu+\gamma}, \quad \frac{\beta(\nu+\gamma)}{\nu-\gamma}, \quad \gamma.$$

Il résulte de ces valeurs que les droites αI, βH, γK, qui fixent le pôle de ρ, passent par ω.

Remarque I. — On pourra donc (avec la règle) trouver le pôle d'une droite X, et, si cette droite est à l'infini, on aura le centre de Q_1 en joignant A, B, C aux milieux des segments $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$.

Remarque II. — Si O est le centre de Q_1, on a

$$(22) \quad x = \frac{1-\gamma}{\gamma(1-\beta)}, \quad y = \frac{1-\alpha}{\alpha(1-\gamma)}, \quad z = \frac{1-\beta}{\beta(1-\alpha)}.$$

15. Théorème. — *Si par le point où une tangente* X(λ, μ, ν) *à une conique* Q_1 *inscrite à* ABC *selon le point* O(α, β, γ), *coupe les rayons* Aα, Bβ, Cγ, *on mène les secondes tangentes* a_1, b_1, c_1, *le trilatère* $a_1b_1c_1$ *est homologique avec* abc; *l'axe* ρ *d'homologie, qui tourne autour de* O, *est tangent à la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon la droite* X, *et le centre* ω

d'homologie, qui est le pôle de ρ *par rapport à* Q_1, *décrit la droite* X_1, *polaire de* O *par rapport à* ABC.

D'après (4), $\alpha^2 : \lambda$ est l'une des coordonnées de A_1, et l'on aura (1) les deux autres en écrivant que a_1 enveloppe Q_1. En procédant de même pour b_1 et c_1, on trouve

$$\left\{\begin{array}{lll} a_1 : \dfrac{\alpha^2}{\lambda}, & \dfrac{-1}{\nu\alpha}, & \dfrac{-1}{\mu\alpha}, \\ b_1 : \dfrac{-1}{\nu\beta}, & \dfrac{\beta^2}{\mu}, & \dfrac{-1}{\lambda\beta}, \\ c_1 : \dfrac{-1}{\mu\gamma}, & \dfrac{-1}{\lambda\gamma}, & \dfrac{\gamma^2}{\nu}. \end{array}\right.$$

On voit par là que les points (aa_1), (bb_1), (cc_1) sont situés sur la droite $\rho\left(\dfrac{\alpha^2}{\lambda}, \dfrac{\beta^2}{\mu}, \dfrac{\gamma^2}{\nu}\right)$.

Cette droite, qui passe par O pour vérifier son équation (1), est de plus (4) tangente à Q.

Les droites AA_1, BB_1, CC_1, qui ont pour coordonnées $x = -\lambda$, $y = -\mu$, $z = -\nu$, sont concourantes au point $\omega(-\lambda, -\mu, -\nu)$, pôle de X (tri. ABC).

Ce point appartient d'ailleurs à la droite

$$X_1(-\alpha, -\beta, -\gamma).$$

car

$$\frac{-\alpha}{-\lambda} + \frac{-\mu}{-\beta} = 1.$$

et il est le pôle de ρ (conique Q) parce qu'il vérifie les relations (21) qui lient le pôle à sa polaire.

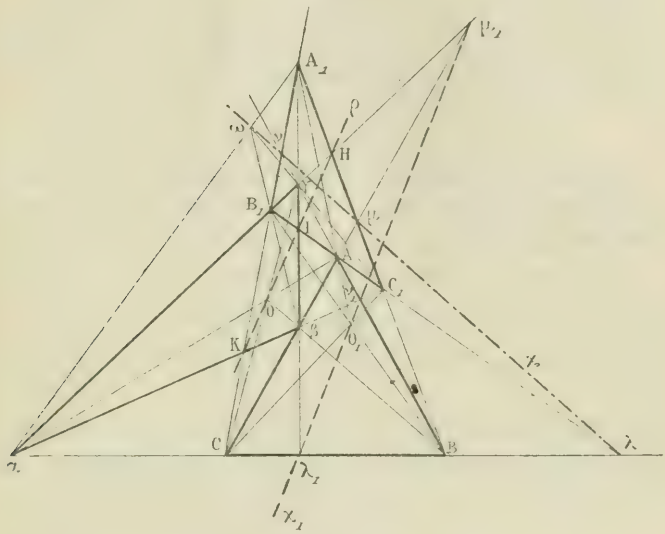
16. *Génération de la conique.* — Coupons le triangle ABC par la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$ (*fig.* 4), et tirons les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ formant le triangle $A_1B_1C_1$ homologique de ABC selon l'axe X, et son pôle

$$O_1(-\lambda, -\mu, -\nu)$$

par rapport à ces triangles.

Proposons-nous de décrire la conique Q circonscrite à ABC selon la droite X et inscrite à $A_1 B_1 C_1$ selon le

Fig. 4.



point O_1 qui est aussi le pôle de X par rapport à cette conique.

Si $\omega(x, y, z)$ est un point de X, on aura (1)

$$(23) \qquad \frac{\lambda}{x} = \frac{y}{\mu} = 1, \qquad \frac{\mu}{y} = \frac{z}{\nu} = 1, \qquad \frac{\nu}{z} = \frac{x}{\lambda} = 1.$$

Les droites ωA_1, ωB_1, ωC_1 coupent BC, CA, AB en α, β, γ, et comme

$$A_1(-\lambda, \mu, \nu), \quad B_1(\lambda, -\mu, \nu), \quad C_1(\lambda, \mu, -\nu),$$

on aura, en utilisant les équations (23),

$$(24) \qquad \alpha x = \lambda^2, \qquad \beta y = \mu^2, \qquad \gamma z = \nu^2.$$

Il en résulte que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes au point $O(\alpha, \beta, \gamma)$.

Or, d'après (24), les équations (23) deviennent

$$(25)\qquad \frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}=1,\qquad \frac{\beta}{\mu}+\frac{\nu}{\gamma}=1,\qquad \frac{\gamma}{\nu}+\frac{\lambda}{\alpha}=1.$$

Donc (1) le point O appartient à Q. Les triangles $A_1B_1C_1$ et $\alpha\beta\gamma$ sont homologiques (centre ω), et l'axe $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ a pour coordonnées

$$\lambda_1=-\alpha,\qquad \mu_1=-\beta,\qquad \nu_1=-\gamma.$$

D'ailleurs, les équations (23) expriment que X_1 passe par O_1, et les équations (25) que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est circonscrit à $A_1B_1C_1$.

On a ainsi le système homologique

$$\begin{array}{c|ccc|c}
\omega & A & B & C & \rho \\
O & A_1 & B_1 & C_1 & X_1, \\
O_1 & \alpha & \beta & \gamma & X
\end{array}$$

dans lequel chacun des centres ou des axes est celui des deux triangles non écrits sur la ligne où il se trouve.

Si I, H, K sont les points qui fixent l'axe ρ, on a

$$\left\{\begin{array}{lccc}
I: & \lambda, & \dfrac{\beta(\lambda+\alpha)}{\lambda}, & \dfrac{1}{\beta(\lambda+\alpha)}, \\[2ex]
H: & \dfrac{1}{\gamma(\mu+\beta)}, & \mu, & \dfrac{\gamma(\mu+\beta)}{\mu}, \\[2ex]
K: & \dfrac{\alpha(\nu+\gamma)}{\nu}, & \dfrac{1}{\alpha(\nu+\gamma)}, & \nu,
\end{array}\right.$$

d'où, d'après (24) et (25),

$$(26)\qquad \rho:\ \frac{\lambda^3}{x^2},\ \frac{\mu^3}{y^2},\ \frac{\nu^3}{z^2}.$$

Ces valeurs montrent que la droite ρ passe par O. De plus, elle est tangente en ce point à Q, car (4) les coordonnées de cette tangente sont

$$\frac{\alpha^2}{\lambda},\ \frac{\beta^2}{\mu},\ \frac{\gamma^2}{\nu},$$

c'est-à-dire, d'après (24), celles (26) de ρ.

Il est facile de voir que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est autopolaire par rapport à Q, car la polaire de α est $A_1 I$ ou $\beta\gamma$. Il en résulte que λ_1 est le pôle de $A_1\alpha$, et comme O_1 est le pôle de X, la droite $O_1\lambda_1$ ou X_1 est la polaire de ω.

En résumé, pour toute position de ω sur X, on pourra (avec la règle) obtenir un point O de Q, la tangente ρ en ce point, et la polaire X_1 de ω.

17. Théorème. — *Deux triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$, *conjugués par rapport à une conique, sont homologiques, et* réciproquement.

Soit Q une conique coupant les côtés BC, CA, AB du triangle de référence aux points λ et λ_1, μ et μ_1, ν et ν_1. On a

$$r = \lambda\lambda_1\mu\mu_1\nu\nu_1 = +1.$$

Appelons I et I_1, H et H_1, K et K_1 les points

$$(\mu\nu, \mu_1\nu_1) \quad \text{et} \quad (\mu\nu_1, \mu_1\nu),$$
$$(\lambda\nu, \lambda_1\nu_1) \quad \text{et} \quad (\lambda\nu_1, \lambda_1\nu),$$
$$(\lambda\mu, \lambda_1\mu_1) \quad \text{et} \quad (\lambda\mu_1, \lambda_1\mu),$$

et $A_1B_1C_1$ le triangle des droites HH_1, HH_1, KK_1, lequel est conjugué de ABC par rapport à Q.

On a

$$I : \frac{\nu_1 - \nu}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}, \quad \frac{\mu\nu - \mu_1\nu_1}{\nu - \nu_1}, \quad \frac{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}{\mu\nu - \mu_1\nu_1},$$

et, en permutant ν et ν_1,

$$I_1 : \frac{\nu - \nu_1}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}, \quad \frac{\mu\nu_1 - \mu_1\nu}{\nu_1 - \nu}, \quad \frac{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}{\mu\nu_1 - \mu_1\nu}.$$

D'où, pour le côté a_1,

$$\frac{\nu + \nu_1}{\nu\nu_1(\mu + \mu_1)}, \quad \frac{\mu + \mu_1}{2}, \quad \frac{2\nu\nu_1}{\nu + \nu_1}.$$

On trouverait de même, pour b_1 et c_1,

$$\frac{2\lambda\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}, \quad \frac{\lambda+\lambda_1}{\lambda\lambda_1(\nu+\nu_1)}, \quad \frac{\nu+\nu_1}{2},$$

$$\frac{\lambda+\lambda_1}{2}, \quad \frac{2\mu\mu_1}{\mu+\mu_1}, \quad \frac{\mu+\mu_1}{\mu\mu_1(\lambda+\lambda_1)}.$$

Les points aa_1, bb_1, cc_1 ont donc pour coordonnées

$$x = \frac{\nu+\nu_1}{\nu\nu_1(\mu+\mu_1)}, \quad y = \frac{\lambda+\lambda_1}{\lambda\lambda_1(\nu+\nu_1)}, \quad z = \frac{\mu+\mu_1}{\mu\mu_1(\lambda+\lambda_1)}.$$

D'où

$$xyz = \frac{1}{r} = +1,$$

ou les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont homologiques selon l'axe $\rho(x, y, z)$.

Réciproquement, si $xyz = 1$, on aura $r = 1$ et les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ homologiques seront conjugués par rapport à la conique Q circonscrite à l'hexagone $\lambda\lambda_1\mu\mu_1\nu\nu_1$.

D'ailleurs, si l'on connaît les coordonnées des côtés a_1, b_1, c_1, on pourra, en s'aidant des relations obtenues, trouver les points où cette conique Q coupe les côtés de ABC.

18. Théorème. — *Si deux triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *sont homologiques, le triangle* A'B'C' *des points* (BC_1, B_1C), (AC_1, A_1C), (AB_1, A_1B) *et le trilatère* $a'_1b'_1c'_1$ *des droites* (bc_1, b_1c), (ac_1, a_1c), (ab_1, a_1b) *sont aussi homologiques.*

En effet, les triangles homologiques ABC et $A_1B_1C_1$ sont conjugués par rapport à une certaine conique Q (17). Or, comme les points B et C_1 ont b_1 et c pour polaires, BC_1 est la polaire du point b_1c; de même B_1C est la polaire du point bc_1. Donc le point (BC_1, B_1C)

ou A′ est le pôle de la droite (b_1c, bc_1) ou a'_1. De même, B′ et C′ sont les pôles de b'_1, c'_1. Les triangles A′B′C′ et $A'_1B'_1C'_1$ sont ainsi conjugués par rapport à Q, et, par suite (17), homologiques.

SUR LA COMPOSITION D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

On lira peut-être avec intérêt la solution du problème que j'ai proposé, cette année, pour le Concours d'admission à l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE. — *Former l'équation de la surface du deuxième degré* (S) *qui contient trois droites données* D, D′ *et* OA.

Cette première Partie est traitée dans tous les cours, en faisant un choix particulier d'axes; la méthode est la même quand les axes sont quelconques. Je prendrai les équations des droites D et D′ sous leur forme la plus réduite en faisant observer que les formes à cinq ou six paramètres apparents, qui sont presque exclusivement usitées dans l'enseignement à cause de la symétrie qui en résulte pour les formules, ne doivent pas faire oublier les formes à quatre paramètres effectifs, bien plus maniables dans les applications.

Soient

$$(D)\quad \begin{cases} D = x - az - b = 0, \\ D_1 = y - cz - d = 0. \end{cases}$$

$$(D')\quad \begin{cases} D' = x - a'z - b' = 0, \\ D'_1 = y - c'z - d' = 0 \end{cases}$$

les équations des droites D et D′;

$$(\mathrm{OA}) \qquad \begin{cases} z = 0, \\ y = mx \end{cases}$$

celles de OA.

La méthode classique consiste à faire passer par la première droite un plan

$$(1) \qquad \mathrm{D} - \lambda \mathrm{D}_1 = 0,$$

par la seconde droite un plan

$$(2) \qquad \mathrm{D}' - \lambda' \mathrm{D}'_1 = 0,$$

et à exprimer que la droite représentée par ces deux équations rencontre OA, ce qui s'exprime en faisant $z = 0$ et $y = mx$ dans ces deux équations, et en écrivant que les deux valeurs de x ainsi obtenues sont égales :

$$x - b - \lambda(mx - d) = 0,$$
$$x - b' - \lambda'(mx - d') = 0,$$

d'où la condition

$$\frac{1 - \lambda m}{1 - \lambda' m} = \frac{b - \lambda d}{b' - \lambda' d'},$$

ou

$$(3) \quad b' - b + \lambda(d - b'm) + \lambda'(bm - d') + \lambda\lambda' m(d' - d) = 0.$$

L'équation cherchée s'obtient en éliminant λ et λ' entre les équations (1), (2) et (3). On obtient ainsi l'équation de (S)

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} (b' - b)\mathrm{D}_1\mathrm{D}'_1 + (d - b'm)\mathrm{D}\mathrm{D}'_1 \\ \quad + (bm - d')\mathrm{D}'\mathrm{D}_1 + \mathrm{D}\mathrm{D}' m(d' - d) = 0. \end{cases}$$

Cette équation contient le paramètre m au premier degré, comme on pouvait le prévoir, puisque ces surfaces (S) ont, au fond, huit points communs, savoir : trois en ligne droite sur D, trois sur D′, un en O, et un sur la

droite qui joint les traces sur xOy de D et de D′, droite qui appartient à (S) puisque xOy est un plan tangent.

Deuxième Partie. — *La surface* (S) *et la surface* (Σ) *analogue qui contient les droites* Δ, Δ′ *et* OA *se coupent, en dehors de* OA, *suivant une certaine courbe. Trouver la surface lieu géométrique de cette courbe lorsque* OA *décrit le plan* xOy.

Ordonnons l'équation (S) par rapport au paramètre m qui va varier

$$(S)\quad \begin{cases} [(d'-d)DD' + bD'D_1 - b'DD'_1]m \\ \quad + (b'-b)D_1D'_1 + dDD'_1 - d'D'D_1 = 0. \end{cases}$$

On aura de même l'équation de (Σ) en mettant simplement des lettres grecques au lieu de lettres françaises, savoir pour les droites

$$(\Delta)\quad \begin{cases} \Delta = x - \alpha z - \beta = 0, \\ \Delta_1 = y - \gamma z - \delta = 0, \end{cases}$$

$$(\Delta')\quad \begin{cases} \Delta' = x - \alpha' z - \beta' = 0, \\ \Delta'_1 = y - \gamma' z - \delta' = 0, \end{cases}$$

d'où

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} [(\delta'-\delta)\Delta\Delta' + \beta\Delta'\Delta_1 - \beta'\Delta\Delta'_1]m \\ \quad + (\beta'-\beta)\Delta_1\Delta'_1 + \delta\Delta\Delta'_1 - \delta'\Delta'\Delta_1 = 0. \end{cases}$$

Le lieu cherché s'obtiendra donc par l'élimination de m et aura pour équation

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{(d'-d)DD' + bD'D_1 - b'DD'_1}{(\delta'-\delta)\Delta\Delta' + \beta\Delta'\Delta_1 - \beta'\Delta\Delta'_1} \\ \quad = \dfrac{(b'-b)D_1D'_1 + dDD'_1 - d'D'D_1}{(\beta'-\beta)\Delta_1\Delta'_1 + \delta\Delta\Delta'_1 - d'\Delta'\Delta_1}. \end{cases}$$

Le lieu est en apparence du quatrième degré, mais il est évident que l'équation précédente se décompose en deux dont l'un doit être $z = 0$ (le lieu de OA qui.

d'après l'énoncé, est étranger). Vérifions ce point : pour cela, il suffit de développer l'équation précédente en supprimant la lettre z.

Le premier numérateur devient ainsi

$$(d'-d)(x-b)(x-b') + b(x-b')(y-d) - b'(x-b)(y-d'),$$

ou

$$(d'-d)x^2 + (b'd-bd')x + (b-b')xy,$$

ou, enfin

$$x[(d'-d)x + (b-b')y + b'd - bd'].$$

Un calcul aussi court donnerait le second numérateur; mais on peut remarquer qu'il se déduit du premier par l'échange simultané des lettres z et y, b et d, b' et d'. Il s'écrit donc

$$y[(b'-b)y + (d-d')x + d'b - db'],$$

et le rapport des deux numérateurs a pour valeur $-\frac{x}{y}$.

Le rapport des deux dénominateurs, qui n'en diffère que par l'emploi des lettres grecques, a donc aussi pour valeur $-\frac{x}{y}$, et les termes indépendants de z disparaissent dans l'équation (4) qui, par conséquent, s'abaisse au troisième degré. Elle ne peut d'ailleurs s'abaisser davantage; car l'équation (4) montre que les quatre droites font partie du lieu et, comme ces droites sont quelconques, elles ne peuvent être sur une quadrique.

Le lieu est donc certainement une surface de troisième degré S_3, dont l'équation sera

$$\frac{1}{z}(LM' - ML') = 0.$$

si l'on écrit l'équation (4) ainsi

$$\frac{L}{L'} = \frac{M}{M'}.$$

Il n'y a évidemment aucun intérêt à développer davantage pour le moment.

Remarque. — On peut remarquer qu'il était inutile d'astreindre la droite OA à décrire un plan fixe; cela résulte immédiatement de la manière classique de construire, par points, la cubique gauche intersection des surfaces (S) et (Σ).

Par le point O, *on mène un plan quelconque : soient* a, a' *les points où il coupe* D *et* D'; α, α' *ses points d'intersection avec* Δ *et* Δ'. *Le point* M *où se coupent* aa' *et* $\alpha\alpha'$ *décrit la surface* S_3. Il paraît que ce mode de génération se trouve indiqué dans Schrœter; je n'ai pas eu le temps de le vérifier. Il a été aussi trouvé par M. F. Deruyts (*Bulletin de l'Académie royale de Bruxelles*, p. 35; 1891) dans un intéressant Mémoire sur les droites des surfaces cubiques, auquel j'ai fait de nombreux emprunts.

Troisième Partie. — *Trouver les droites de la surface.*

Le calcul faisait immédiatement découvrir les quatre droites données D, D', Δ et Δ'. Quelques candidats ont écrit ainsi l'équation (4)

$$\frac{D'(bD_1 - dD) - D(b'D'_1 - d'D')}{\Delta'(\beta\Delta_1 - \delta\Delta) - \Delta(\beta'\Delta'_1 - \delta'\Delta')}$$
$$= \frac{D_1(b'D'_1 - d'D') - D'_1(bD_1 - dD)}{\Delta_1(\beta'\Delta'_1 - \delta'\Delta) - \Delta'_1(\beta\Delta_1 - \delta\Delta)}.$$

et trouvé deux nouvelles droites

$$(G)\quad \begin{cases} bD_1 - dD = 0, \\ b'D'_1 - d'D' = 0, \end{cases} \qquad (\Gamma)\quad \begin{cases} \beta\Delta_1 - \delta\Delta = 0, \\ \beta'\Delta'_1 - \delta'\Delta' = 0; \end{cases}$$

ce sont celles qui passent par O et s'appuient sur un des couples D, D′ ou Δ, Δ′.

C'est par des considérations géométriques, comme d'ailleurs il convenait, que toutes les droites ont été trouvées. Il suffisait pour cela de recourir à deux considérations simples : 1° toute droite qui a quatre points sur une surface du troisième degré en fait partie, ce qui donnait les sécantes K et K′ communes aux quatre droites données ; 2° tout plan qui coupe une surface cubique suivant deux droites la coupe suivant une autre droite. Ces deux théorèmes bien connus, et qui ne sont pas particuliers aux surfaces du troisième ordre, suffisaient, avec la détermination directe des six premières droites signalées qui se faisait sans peine et que je passe sous silence, pour abréger. Les lecteurs des *Nouvelles Annales* trouveront plus loin une Note de M. d'Ocagne sur ce même sujet ; je n'insisterai donc pas davantage.

Je ne résiste pas cependant au plaisir de signaler la très élégante classification des 27 droites que m'a signalée M. E. Blutel ; le plan GΓ coupe les droites K et K′ suivant une droite L qui est évidemment sur la surface (quatre points communs). Considérons maintenant les cinq droites D, D′, Δ, Δ′ et L qui coupent K et K′ : chacune d'elles avec K ou K′ détermine un plan où se trouve une nouvelle droite, soit dix en tout.

Trois quelconques d'entre elles avec K et K′ déterminant surabondamment un hyperboloïde qui coupe S_3 suivant une nouvelle droite, soit dix hyperboloïdes et dix nouvelles droites, ce qui fait le compte. Si K et K′

sont imaginaires, les dix plans donnent dix droites imaginaires, et les dix hyperboloïdes dix droites réelles, en tout douze droites imaginaires et quinze réelles.

J'indiquerai dans une Note le degré de généralité du mode de génération qui faisait l'objet du problème.

Quatrième Partie. — *Étudier complètement la surface* S_3 *dans le cas particulier où les quatre droites* D, D′, Δ *et* Δ′ *sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde qui passe au point* O ; *et montrer que, dans ce cas, le lieu comprend un plan qui demeure invariable lorsque les quatre droites décrivent respectivement des plans passant par le point* O (et que le plan tangent en O à l'hyperboloïde demeure invariable).

Pour me conformer au texte que les candidats ont eu entre les mains, je laisserai d'abord de côté le dernier membre de phrase.

Voici d'abord le calcul. Les quatre droites étant sur un hyperboloïde H et faisant partie d'un même système sont rencontrées par une même génératrice G de l'autre système passant par O ; profitant de l'indétermination possible du plan des xy que j'ai signalée dans la remarque qui suit la seconde Partie, je prendrai G pour axe des x et le plan tangent à l'hyperboloïde en O comme plan des xy. L'équation de l'hyperboloïde sera de la forme

$$Py + Qz = 0,$$

avec

$$P = Ax + By + Cz, \qquad Q = Ex + Fz + G.$$

La droite (D) aura pour équations

$$(5) \qquad \begin{cases} y = cz, \\ Pc + Q = 0. \end{cases}$$

De même (D'), (Δ), (Δ')

$$(D') \qquad \begin{cases} y = c'z, \\ Pc' + Q = 0. \end{cases}$$

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} y = \gamma z, \\ P\gamma + Q = 0. \end{cases}$$

$$(\Delta') \qquad \begin{cases} y = \gamma' z, \\ P\gamma' + Q = 0. \end{cases}$$

On peut utiliser les calculs de la seconde Partie, et écrire immédiatement l'équation du lieu (4) en y faisant

$$d = d' = \delta = \delta' = 0,$$

$$(6) \qquad \frac{bD'D_1 - b'DD'_1}{\beta\Delta'\Delta_1 - \beta'\Delta\Delta'_1} = \frac{(b' - b)D_1D'_1}{(\beta' - \beta)\Delta_1\Delta'_1}.$$

Si l'on fait $y = cz$ dans la seconde équation (5), il vient

$$Pc + Q + cB(cz - y) = 0,$$

d'où

$$D = \frac{Pc + Q + cB(cz - y)}{E - Ac}, \qquad D' = \frac{Pc' + Q + c'B(c'z - y)}{E - Ac'},$$

$$b = -\frac{G}{E - Ac}, \qquad b' = -\frac{G}{E + Ac'},$$

et l'équation devient

$$\frac{-G[Pc' + Q + c'B(c'z - y)](y - cz) + G[Pc + Q + cB(cz - y)](y - c'z)}{G[P\gamma' + Q + \gamma'B(\gamma'z - y)](y - \gamma z) + G[P\gamma + Q + \gamma B(\gamma z - y)](y - \gamma' z)}$$
$$= \frac{(y - cz)(y - c'z)(c' - c)A}{(y - \gamma z)(y - \gamma' z)(\gamma' - \gamma)A}.$$

Ordonnons le premier numérateur par rapport aux lettres c, c', après l'avoir divisé par G,

$$Qz(c - c') + Py(c - c') - B(c' - c)(y - cz)(y - c'z).$$

Multiplions les deux termes du deuxième rapport par $-\frac{B}{A}$ et ajoutons au premier rapport terme à terme,

nous obtenons la nouvelle proportion

$$\frac{Qz + Py}{Qz + Py} = \frac{(y - cz)(y - c'z)}{(y - \gamma z)(y - \gamma' z)}.$$

Sous cette forme, on voit que le lieu se décompose en deux

$$Qz + Py = 0$$

qui est l'hyperboloïde donné, et

$$(y - cz)(y - c'z) - (y - \gamma z)(y - \gamma' z) = 0$$

qui se compose du plan $z = 0$ et du plan

$$(cc' - \gamma\gamma')z + (\gamma + \gamma' - c - c')y = 0.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Soit A le point où OA rencontre (H). J'appellerai toujours premier système de génératrices celui qui contient deux des quatre droites, quel que soit d'ailleurs l'hyperboloïde considéré. Cela posé, par A il passe deux génératrices de (H), l'une g du premier système, l'autre g' du deuxième : g' rencontre D, D', Δ, Δ' et OA ; elle est donc commune aux deux quadriques S et Σ qui ont dès lors trois génératrices communes G, g' du deuxième système et OA du premier. Ces deux quadriques ont donc une quatrième génératrice commune g'' du premier système. Lorsque OA pivote autour de O, g' décrit l'hyperboloïde (H) qui fait donc partie de l'intersection ; g'', qui n'est pas sur (H), décrit la partie restante du lieu, c'est-à-dire un plan. Étant du premier système, g'' coupe G, le plan que l'on vient de trouver passe par G.

Reste ce qu'on pouvait dire sur le second membre de phrase ; le calcul répondait nettement. Les candidats qui ont déterminé le plan ont remarqué qu'il passait par G ; ils ne pouvaient pas dire autre chose. Ils liront

dans les feuilles de M. Croville-Morant, qu'ils ont entre les mains, l'élégante démonstration, due, je crois, à M. Antomari, et prouvant que ce plan est conjugué du plan tangent en O à l'hyperboloïde dans l'involution déterminée par les deux couples de plans OD, OD′ et OΔ, OΔ'. Ce point se vérifierait sans peine sur l'équation que j'ai donnée plus haut.

Note. — Voici quelques détails complémentaires sur le nombre des droites et sur le degré de généralité de la surface qu'on trouvait. Le nombre des conditions (19), qui résultait de l'énoncé, ne prouvant rien, il faut raisonner autrement et recourir à la théorie des surfaces du troisième degré.

On sait depuis longtemps (voir *Quarterly Journal*, t. II, p. 114 et suiv.; 1857, Schläffli) qu'il y a deux cent seize manières de grouper les 27 droites d'une surface en couples de deux droites ne se rencontrant pas. (En effet, chacune des 27 droites est rencontrée par 10 autres; donc 16 ne la rencontrent pas, et, comme chaque couple est obtenu de deux manières, on a en tout $\frac{16 \times 27}{2} = 216$ couples). Prenons pour K et K′ les deux droites d'un de ces couples; K et K′ ont cinq sécantes communes, qui peuvent être associées de quinze manières en deux couples D, D′ et Δ, Δ' de droites ne se coupant pas, ce qui donne déjà $216 \times 15 = 3240$ groupements des 27 droites en paires de deux droites ne se rencontrant pas. Prenons une de ces paires de deux droites (nos droites D, D′ et Δ, Δ'); il n'existe qu'un point O, d'où partent une droite rencontrant D et D′ sans rencontrer Δ, ni Δ' et une droite rencontrant Δ et Δ' sans rencontrer D ni D′ (ce point se détermine facilement à l'aide des notations de Schläffli employées par

M. d'Ocagne). Donc toute surface du troisième ordre peut être engendrée de 3240 manières par le procédé de l'énoncé. Mais, dans ce que je viens de dire, je n'ai pas distingué le réel de l'imaginaire; en se plaçant au point de vue du réel, il faut exclure, au moins, les surfaces cubiques qui n'ont que trois droites réelles.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE COMPLÈTE DE LA TROISIÈME PARTIE DU PROBLÈME D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Étant donnés un point O et quatre droites D, D′, Δ, Δ′ ne se rencontrant pas, on mène par le point O un plan quelconque qui coupe ces quatre droites aux points d, d', δ, δ'. Les droites dd', $\delta\delta'$ se rencontrent en un point M dont le lieu est une surface de troisième ordre (M). Il s'agit de déterminer les vingt-sept droites de la surface (M). Appelons D_0 la droite issue de O qui rencontre D et D′, Δ_0 la droite issue de O qui rencontre Δ et Δ′.

Si l'on considère toutes les droites $\delta\delta'$ qui rencontrent D, on voit que cette dernière droite appartient à la surface; de même pour D′, Δ et Δ′.

Si l'on considère toutes les droites $\delta\delta'$ qui rencontrent D_0, on voit que cette dernière droite appartient à la surface; de même pour Δ_0.

Nous allons voir que la connaissance des six droites D, D′, Δ, Δ′, D_0, Δ_0 entraîne immédiatement celle des vingt et une autres. Nous entendons par là qu'à l'aide de ces six droites on peut effectivement *construire* les

vingt et une restantes, et non pas seulement se contenter d'indiquer des plans liés à ces droites et contenant de nouvelles droites de la surface sans déterminer autrement ces dernières.

Nous emploierons, pour faire cette détermination complète, la notation de M. Cremona, qui est la suivante :

Les vingt-sept droites, réelles ou imaginaires, de toute surface du troisième ordre peuvent être représentées par

$$\begin{array}{cccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\
 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\
 & & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\
 & & & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\
 & & & & c_{45} & c_{46} \\
 & & & & & c_{56},
\end{array}$$

les relations de situation entre ces vingt-sept droites étant indiquées par leurs indices ainsi qu'il résulte de l'énoncé que voici :

Deux des vingt-sept droites se rencontrent lorsqu'elles appartiennent à l'un des groupes suivants :

1° *Une droite a et une droite b d'indices différents ;*

2° *Une droite a ou b et une droite c ayant un indice commun ;*

3° *Deux droites c n'ayant pas d'indice commun.*

Pour tous les autres groupements deux à deux des vingt-sept droites il n'y a pas rencontre.

On vérifie immédiatement, en prenant l'une quelconque des vingt-sept droites et appliquant l'énoncé précédent, que cette droite en rencontre dix autres.

Cela posé, nous constituerons, dans le cas qui nous

occupe, les groupes numérotés en chiffres romains dont voici l'énumération :

I. Les quatre droites D, D′, Δ, Δ′ qui appartiennent, comme nous venons de le voir, à la surface (M) et ne se rencontrent pas pourront être ainsi désignées (Énoncé, 3°) :

D ..... c_{12}
D′ ..... c_{13}
Δ ..... c_{14}
Δ′ ..... c_{15}

Total : 4 *droites.*

II. La droite D_0, qui rencontre à la fois c_{12} et c_{13}, ne peut être que a_1. b_1 (É., 2°), c_{45}, c_{46}, c_{56} (É., 3°). Mais elle ne doit rencontrer ni Δ, ni Δ′, c'est-à-dire ni c_{14}, ni c_{15}. Or a_1 et b_1 rencontrent c_{14} et c_{15}, c_{46} rencontre c_{15}, et c_{56} rencontre c_{14}. La droite D_0 ne peut donc être que c_{45}. On voit de même que Δ_0 ne peut être que c_{23}. Ces deux droites c_{45} et c_{23} ont bien en commun un point qui est le point O.

On voit donc que l'on doit prendre pour

D_0 ..... c_{45}
Δ_0 ..... c_{23}

Total : 2 *droites.*

III. Les droites c_{13} et c_{45} déterminent un plan (E., 3°). Ce plan coupe les droites c_{14} et c_{15} en des points qui ne sont pas sur les deux précédentes, car c_{14} et c_{15}, qui ne se rencontrent pas, ne rencontrent pas non plus c_{13} et c_{45}. La droite qui joint ces deux points d'intersection coupe donc les quatre droites c_{13}, c_{45}, c_{14} et c_{15} en quatre points distincts. Elle appartient donc tout entière à la surface. Ce ne peut être ni une a, ni une b, car il faudrait que son indice appartînt à la fois aux quatre

précédentes (É, 2°) qui n'ont pas toutes ensemble un indice commun. C'est donc une c, et comme elle ne peut avoir aucun des indices 1, 3, 4, 5, c'est c_{26}.

Ainsi donc :

La droite joignant les points d'intersection de

c_{14} et c_{15} avec le plan $(c_{13}c_{45})$ est c_{26}.

De même :

La droite joignant les points d'intersection de

c_{14}	et	c_{15}	avec le plan	$(c_{12}c_{45})$	est	c_{36}
c_{12}	»	c_{13}	»	$(c_{15}c_{23})$	»	c_{46}
c_{12}	»	c_{13}	»	$(c_{14}c_{23})$	»	c_{56}

Total : 4 *droites.*

IV. Les droites c_{13} et c_{56} d'une part, c_{15} et c_{36} de l'autre déterminent deux plans dont la droite d'intersection, qui coupe ces quatre droites en quatre points distincts, est tout entière sur la surface (M). En reprenant le même raisonnement qu'au n° III, on voit que cette droite ne peut être que c_{24}. On trouve ainsi que

les plans	$(c_{13}c_{56})$	et	$(c_{15}c_{36})$	se coupent	suivant	c_{24}
»	$(c_{13}c_{46})$	»	$(c_{14}c_{36})$	»		c_{25}
»	$(c_{12}c_{56})$	»	$(c_{13}c_{26})$	»		c_{34}
»	$(c_{12}c_{46})$	»	$(c_{15}c_{26})$	»		c_{35}
»	$(c_{24}c_{35})$	»	$(c_{25}c_{34})$	»		c_{16}.

Total : 5 *droites.*

Remarque. — Les onze droites déduites des quatre qui étaient données et du point O, se construisant toutes linéairement, sont nécessairement réelles.

Donc, *les quinze droites c de la surface* (M) *sont toutes réelles.*

V. Il existe deux droites, réelles ou imaginaires,

rencontrant les quatre droites D, D', Δ, Δ', c'est-à-dire $c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}$. Ces deux droites seront a_1 et b_1 (E, 2°).

Total : *deux droites.*

VI. En reprenant le même raisonnement qu'au n° III, et s'appuyant sur les deux premières parties de l'énoncé au lieu des deux dernières, on voit que :

La droite joignant les points d'intersection de :

c_{23}	et c_{26}	avec le	plan	$(b_1 c_{12})$	est a_2,
c_{23}	» c_{36}	»	»	$(b_1 c_{13})$	» a_3,
c_{45}	» c_{46}	»	»	$(b_1 c_{14})$	» a_4,
c_{45}	» c_{56}	»	»	$(b_1 c_{15})$	» a_5,
c_{26}	» c_{36}	»	»	$(b_1 c_{16})$	» a_6,
c_{23}	» c_{26}	»	»	$(a_1 c_{12})$	» b_2,
c_{23}	» c_{36}	»	»	$(a_1 c_{13})$	» b_3,
c_{45}	» c_{46}	»	»	$(a_1 c_{14})$	» b_4,
c_{45}	» c_{56}	»	»	$(a_1 c_{15})$	» b_5,
c_{26}	» c_{36}	»	»	$(a_1 c_{16})$	» b_6.

Total : *dix droites.*

Remarque. — Ces dix dernières droites se déduisant linéairement de a_1 et b_1 sont réelles lorsque ces deux dernières le sont.

D'autre part, nous aurions pu, au lieu de partir du couple (a_1, b_1), partir de tout autre couple (a_2, b_2), (a_3, b_3), ..., et nous aurions de même obtenu les dix droites restantes par des constructions linéaires. Il en résulte que, si l'un quelconque des six couples (a, b) est imaginaire, les cinq autres le sont aussi. Donc, *les douze droites a et b sont toutes à la fois réelles ou imaginaires.*

En résumé, nous avons successivement déterminé $4 + 2 + 4 + 5 + 2 + 10 = 27$ droites de la surface (M), et, grâce à l'emploi de la notation de M. Cremona,

nous sommes sûrs que ces vingt-sept droites sont distinctes. Nous avons donc *toutes les droites* de la surface.

Nous voyons, en outre, que, suivant que les deux droites qui rencontrent D, D′, Δ, Δ′ sont réelles ou imaginaires, la surface a vingt-sept ou quinze droites réelles et nous avons le moyen de déduire de ces six droites les vingt et une autres par des constructions linéaires, c'est-à-dire susceptibles de se traduire par une épure.

SUR LA SURFACE DE FRESNEL;

PAR M. LE Dr VAHLEN.

Nous cherchons l'équation de la surface de Fresnel pour n dimensions.

La variété ellipsoïdale $\mathfrak{F}$, définie par l'équation

$$\sum_i a_i x_i^2 = 1, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

est coupée par une variété plane $\mathcal{E}$ de $n - 1$ dimensions, passant par le centre de $\mathfrak{F}$. Nous élevons des perpendiculaires sur $\mathcal{E}$ au centre, égales aux demi-axes principaux de la variété ellipsoïdale Φ, commune à $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{E}$. En variant $\mathcal{E}$, les points extrêmes de ces perpendiculaires décrivent la variété de Fresnel, dont nous voulons établir l'équation.

Nous transformons l'équation de $\mathfrak{F}$ par la substitution orthogonale

$$x_i = \sum_k x_{ik} \xi_k. \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Soit $\xi_x = 0$ l'équation de la variété plane $\mathcal{E}$, l'équa-

tion de Φ sera

$$\sum_{i,k} \xi_i \xi_k \sum_h a_h x_{hi} x_{hk} = 1 \quad \begin{pmatrix} i,k = 1, \ldots, n-1 \\ h = 1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

En désignant par α le carré inverse d'un demi-axe principal de Φ, les $n-1$ valeurs de α sont les racines de l'équation de Laplace, ici de l'équation

$$\left| \sum_h a_h x_{hi} x_{hk} - \delta_{ik} \alpha \right| = 0 \quad \begin{pmatrix} h = 1, \ldots, n \\ i,k = 1, \ldots, n-1 \\ \delta_{ik} = 0, \delta_{ii} = 1 \end{pmatrix}.$$

Ordonnée suivant les puissances de α, cette équation s'écrira

$$\left| \sum_{\substack{h \\ i,k \neq n}} a_h x_{hi} x_{hk} \right| - \alpha \sum_{n_1=1}^{n} \left| \sum_{\substack{h \\ i,k \neq n, n_1}} a_h x_{hi} x_{hk} \right|$$
$$+ \alpha^2 \sum_{n_1, n_2 = 1}^{n} \left| \sum_{\substack{h \\ i,k \neq n, n_1, n_2}} a_h x_{hi} x_{hk} \right| - \ldots (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} = 0.$$

Nous appliquons le théorème de Cauchy, concernant la somme des carrés des déterminants d'un système oblong et nous obtenons

$$\sum_{i \neq n} |\sqrt{a_h} x_{hi}|^2 - \alpha \sum_{n_1=1}^{n} \sum_{i \neq n, n_1} |\sqrt{a_h} x_{hi}|^2$$
$$+ \alpha^2 \sum_{\substack{n_1, n_2 = 1 \\ i \neq n, n_1, n_2}}^{n} |\sqrt{a_h} x_{hi}|^2 - \ldots (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} = 0 \quad (h, i = 1, \ldots, n).$$

Au moyen d'un théorème connu sur les subdéterminants de systèmes orthogonaux [1], l'équation se trans-

---

[1] Si (a_{ik}), $(i, k = 1, \ldots, n)$ est un système orthogonal, le carré d'une matrice du système est égal au carré de la matrice adjointe; par exemple,

$$|a_{ik}|^2 \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, \nu \\ k = \mu + 1, n \end{pmatrix} = |a_{ik}|^2 \begin{pmatrix} l = \nu + 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, \mu \end{pmatrix}.$$

formera dans la suivante :

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{x_{hn}^2}{a_h} - \alpha \sum_{\substack{h_1, h_2 = 1 \\ h_1 < h_2}}^{n} \frac{x_{h_1 n}^2 + x_{h_2 n}^2}{a_{h_1} a_{h_2}}$$

$$- \alpha^2 \sum_{\substack{h_1, h_2, h_3 = 1 \\ h_1 < h_2 < h_3}}^{n} \frac{x_{h_1 n}^2 + x_{h_2 n}^2 - x_{h_3 n}^2}{a_{h_1} a_{h_2} a_{h_3}} - \ldots (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} \frac{\sum_{h=1}^{n} x_{hn}^2}{a_1 a_2 \ldots a_n} = 0.$$

Posons

$$x_{in} = \sqrt{\alpha} . \xi_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

les variables ξ_i sont les coordonnées du point extrême du demi-axe principal $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, normal à $\mathcal{E}$ au centre; et l'équation de la variété de Fresnel devient

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\xi_h^2}{a_h} - \alpha \sum_{\substack{h_1, h_2 = 1 \\ h_1 < h_2}}^{n} \frac{\xi_{h_1}^2 + \xi_{h_2}^2}{a_{h_1} a_{h_2}}$$

$$+ \alpha^2 \sum_{\substack{h_1, h_2, h_3 = 1 \\ h_1 < h_2 < h_3}}^{n} \frac{\xi_{h_1}^2 + \xi_{h_2}^2 + \xi_{h_3}^2}{a_{h_1} a_{h_2} a_{h_3}} - \ldots (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = 0.$$

Dans cette équation, $\frac{\xi_h^2}{a_h}$ est multiplié par

$$1 - \sum_{h_1 = 1}^{n} \frac{\alpha}{a_{h_1}} + \sum_{h_1, h_2 = 1}^{n} \frac{\alpha^2}{a_{h_1} a_{h_2}} - \ldots (-1)^{n-1} \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1} = 1}^{n} \frac{\alpha^{n-1}}{a_{h_1} a_{h_2} \ldots a_{h_{n-1}}},$$

$$(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1} \neq h),$$

c'est-à-dire par

$$\frac{\prod_i \left(1 - \frac{\alpha}{a_i}\right)}{1 - \frac{\alpha}{a_h}} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

C'est par cette remarque que l'équation se réduira à celle-ci :

$$\sum_h \frac{\xi_h^2}{a_h - \alpha} = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n).$$

A l'aide de l'identité

$$\alpha \sum_h \xi_h^2 = 1, \quad \text{ou} \quad \sum_h \left(\frac{a_h \alpha}{a_h - \alpha} - \frac{\alpha^2}{a_h - \alpha} \right) \xi_h^2 = 1 \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

l'équation prendra la forme finale

$$\sum_h \frac{\xi_h^2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a_h}} = 1.$$

En supposant l'équation de $\mathcal{F}$ donnée dans la forme

$$\sum_h \frac{x_h^2}{c_h^2} = 1 \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

l'équation de la variété de Fresnel sera

$$\sum_h \frac{\xi_h^2}{\sum_i \xi_i^2 - c_h^2} = 1 \qquad (h, i = 1, \ldots, n).$$

FORMULE DE CARDAN MODIFIÉE PAR CAYLEY;

PAR M. H. WEBER,
Professeur à Göttingen.

TRADUIT PAR M. L. LAUGEL.

Cette démonstration est extraite du premier Volume du *Traité d'Algèbre* de M. H. Weber (Leipzig, Teubner, 1894). Ouvrage appelé sans aucun doute à jouer de nos jours le rôle

de l'*Algèbre* de Serret autrefois, en nous initiant aux découvertes faites, depuis la publication de ce dernier livre, par l'éminent auteur et les savants de l'Allemagne et par nos compatriotes MM. Hermite, Laguerre, Jordan, etc.

Considérons dans la formule de Cardan les deux grandeurs u et v définies par les expressions

$$(1)\qquad \begin{cases} u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \end{cases}$$

On sait que toute racine cubique a trois valeurs distinctes que l'on obtient en multipliant l'une d'elles par $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ $(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0)$.

Par conséquent les grandeurs u, v définies par (1) ont trois valeurs et leur somme $u + v = y$, y, représentant les racines de l'équation du troisième degré

$$y^3 + py + q = 0,$$

possède, lorsqu'on n'a égard qu'aux expressions (1), *neuf valeurs distinctes*. Ces valeurs donnent du reste les trois solutions de l'équation du troisième degré lorsqu'on les distingue par la condition connue

$$(2)\qquad 3uv = -p.$$

La formule de Cardan présente donc une lacune, en ce sens que seule elle ne suffit pas à déterminer sans discussion les racines. Voici comment l'illustre et regretté Cayley a remédié à ce défaut [Cayley, *Philosophical Magaz.*, vol. XXI, 1861; *Collected math. Papers*, vol. V, p. 310)].

Définissons deux nouvelles grandeurs ξ, η par

$$(3)\qquad u = \xi^2\eta, \qquad v = \xi\eta^2.$$

Multiplions ces deux grandeurs en tenant compte de (2);

il vient

$$\xi\eta = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}}. \tag{4}$$

Portons cette valeur en (3) et remplaçons u et v par leurs expressions tirées de (1), nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \sqrt[3]{\frac{3q}{2p} + \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}}. \\ \eta &= \sqrt[3]{\frac{3q}{2p} - \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Si l'on écrit alors l'inconnue y de l'équation du troisième degré sous la forme

$$y = \xi\eta(\xi + \eta), \tag{6}$$

on obtient une expression qui, lorsque l'on remplace indépendamment l'un de l'autre ξ par ξ, $\varepsilon\xi$, $\varepsilon^2\xi$ et η par η, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon^2\eta$ ne prendra plus *neuf* valeurs, mais *seulement* les *trois* valeurs suivantes

$$\xi^2\eta + \xi\eta^2,$$
$$\varepsilon\xi^2\eta + \varepsilon^2\xi\eta^2,$$
$$\varepsilon^2\xi^2\eta + \varepsilon\xi\eta^2,$$

racines de l'équation.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Mannheim.

Soient une surface (S), une de ses tangentes en son point a, et la trace α de cette droite sur un plan de projection (P).

Si l'on prend des projetantes parallèles à $a\alpha$ ou partant d'un point de cette droite, on sait que :

Des courbes, tracées sur (S) *à partir de* a, *se pro-*

jettent sur (P) *suivant des courbes tangentes en* α *à la courbe de contour apparent de* (S) *sur* (P).

Supposons que les courbes, tracées à partir de a, passent en outre par un point b de (S). Leurs projections passeront alors par le point β projection de b; ces projections étant toujours tangentes entre elles en α. Lorsque b est infiniment voisin de a, le point β est alors infiniment voisin de α, et l'on voit ainsi que :

Si des courbes tracées sur (S) *ont entre elles au point a un contact du premier ordre, leurs projections sur* (P) *ont au point* α *un contact du deuxième ordre* [1].

Il est clair que la tangente commune en a, aux courbes tracées sur (S), ne doit pas être la projetante $a\alpha$.

Nous pouvons opérer, en partant de ce dernier théorème, comme nous l'avons fait pour le premier et ainsi de suite successivement. On arrive ainsi à cette proposition :

Si des courbes tracées sur (S) *ont entre elles au point a un contact du* $n^{ième}$ *ordre, leurs projections sur* (P) *ont au point* α *un contact du* $(n+1)^{ième}$ *ordre.*

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. EN 1895.

Mathématiques.

Un cercle (C) et une parabole (P) sont représentés, en coordonnées rectangulaires, par les deux équations

$$(C)\quad x^2 - y^2 - 4a^2 = 0, \qquad (P)\quad y^2 - 2ax - 4a^2 = 0;$$

[1] *Voir* page 138.

d'un point A, pris sur l'axe Oy, on mène les tangentes au cercle, dont les points de contact sont M et M', et les tangentes à la parabole, dont les points de contact sont N et N'.

1° Démontrer que chacune des droites MN, MN', M'N, M'N' passe par un point fixe lorsque le point A décrit l'axe Oy.

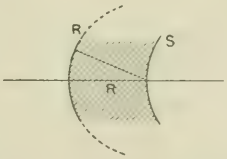
2° Par les quatre points M, M', N, N' on peut faire passer une conique admettant l'axe des y pour axe de symétrie; former l'équation de cette conique (E).

3° Trouver le nombre et la nature des coniques (E) qui passent par un point donné du plan, d'après la position de ce point dans le plan.

5° Construire la courbe décrite par les points de contact des coniques (E) avec les tangentes parallèles à la droite qui a pour équation $y = x$. Distinguer les portions du lieu qui conviennent à des ellipses de celles qui conviennent à des hyperboles.

Physique.

Une lentille de verre est limitée d'un côté par une surface sphérique convexe de rayon R; la seconde surface, de rayon S,



passe par le centre de la première; l'épaisseur de la lentille est donc égale à R.

a. On déterminera la position de l'image d'un objet quelconque et son grossissement.

b. La lentille étant employée comme loupe, on examinera s'il est possible de trouver une position de l'œil telle que l'image paraisse achromatique.

c. On déterminera les positions et grandeurs de toutes les images d'un même objet dues aux réfractions et réflexions simples ou multiples dans cette lentille.

Un calorimètre à glace contient de l'alcool dont on provoque l'évaporation par le passage d'un courant d'air pris à 0°. On demande quelle quantité d'air il faut faire passer à travers l'al-

cool pour en évaporer 1^{gr}: et quel poids de glace est formé par cette évaporation.

Chaleur de fusion de la glace..... 80^{Cal}
Chaleur de vaporisation de l'alcool à 0°... 236^{Cal}
Tension de vapeur de l'alcool à 0°..... $12^{mm},7$ de mercure.
Densité de vapeur de l'alcool..... 1,59

Qu'arriverait-il si le courant d'air était chaud?

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann; par M. *Paul Appell*, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences, et *Édouard Goursat*, Maître de conférences à l'École Normale supérieure, avec une Préface de *M. Hermite*. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1895. Gr. in-8° de XVIII-530 pages, avec 91 figures dans le texte. Prix : 16^{fr}.

Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles de la Mécanique et applications, professées à la Faculté des Sciences de Paris; par *P. Painlevé*, Maître de Conférences à la Sorbonne. Paris, A. Hermann, 1895; in-4° lith. de 290 pages. Prix : 14^{fr}.

Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques, à l'usage des candidats à la licence ès Sciences mathématiques, par *Charles Henry*, Maître de Conférences à l'École pratique des Hautes Études, Bibliothécaire à la Sorbonne, Membre de la Société mathématique de France. Paris, Nony et Cie, 1895; 1 vol. in-8° de 126 pages. Prix : 3^{fr}.

Leçons sur les coordonnées tangentielles, par *G. Papelier*, Ancien Élève de l'École Normale, Professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Orléans. Seconde Partie : Géométrie dans l'espace. Paris, Nony et Cie, 1895; in-8° de 358 pages. Prix : 5^{fr}.

Exercices de Calcul différentiel, par *L. Collette*, Ancien élève de l'École normale des Sciences de Gand, Professeur agrégé de l'Enseignement moyen du degré supérieur. Liège, A. Mio et Jansar; 1894; gr. in-8° de 245 pages. Prix : 3^{fr}.

Conic sections treated geometrically, by *W.-H. Besant*, Sc. D. F.R.S. fellow of Saint-John's College Cambridge. Ninth edition revised and enlarged. London, George Bell and sons, 1895; in-8° de VIII-286 pages avec figures dans le texte. Prix : 4 sh. 6 d.

LES PROPRIÉTÉS FOCALES DES CONIQUES OBTENUES AU MOYEN DE LA MÉTHODE DES POLAIRES RÉCIPROQUES [1];

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. Étant donnés une conique K, dont l'équation est $K = 0$, et un point $P(\alpha, \beta)$, l'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection de la conique K et du cercle P de rayon nul, qui a le point (α, β) pour centre, est

$$K - \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2] = 0. \tag{1}$$

Comme les quatre points d'intersection du cercle P et de la conique K sont imaginaires, le système (1) comprend un seul couple de droites réelles Δ et Δ'. Ces droites seront dites, par analogie avec une expression proposée par Chasles [2], les *conjointes du point* P *et de la conique* K.

Parmi les couples de cordes imaginaires communes au cercle P et à la conique K se trouvent les *droites isotropes* passant au point P

$$(x-\alpha) - i(y-\beta) = 0,$$
$$(x-\alpha) - i(y-\beta) = 0,$$

c'est-à-dire, les droites qui unissent le point P aux

(1) Communication faite le 8 avril 1887 à la Société mathématique d'Edimbourg.

(2) *Journal de Liouville*, t. III, p. 385.

ombilics I et J du plan, points imaginaires situés sur la droite de l'infini et par où passent tous les cercles du plan.

Une première conséquence de cette remarque est que *le point* P *a même polaire relativement à la conique* K *et aux conjointes* Δ *et* Δ'. Les conjointes passent en effet, d'après ce qui précède, par les points communs à la conique K et aux droites PI et PJ.

Par conséquent, le point de rencontre des conjointes Δ et Δ' se trouve sur la polaire du point P, relativement à la conique K. On peut observer aussi qu'en vertu d'une propriété générale des coniques passant par l'intersection d'une conique et d'un cercle, *les conjointes* Δ et Δ' *sont également inclinées sur les axes de la conique* K.

Une deuxième conséquence de la remarque faite plus haut est que, parmi les conjointes d'un point et d'un cercle, se trouve toujours la droite à l'infini du plan. L'autre conjointe, située à distance finie, est l'*axe radical du point et du cercle,* dont les propriétés sont bien connues.

On voit tout de suite que les conjointes du centre d'une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et de cette courbe sont données par

$$y = \pm \frac{ab}{c};$$

et celles du centre d'une hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

par

$$x = \pm \frac{ab}{c}.$$

Dans le cas de l'ellipse, *les tangentes menées des extrémités du grand axe au cercle qui a pour diamètre le petit axe, coupent ce petit axe aux points par où passent les conjointes du centre qui sont, d'ailleurs, parallèles au grand axe.* C'est la traduction de la formule

$$y = \pm \frac{ab}{c}.$$

2. L'importance de la considération des conjointes réside dans le théorème suivant :

Dans la transformation par polaires réciproques relativement à un cercle, les éléments corrélatifs des foyers d'une conique sont les conjointes du centre du cercle directeur (centre de la transformation) et de la conique corrélative.

La démonstration de ce théorème est des plus simples. Les ombilics I et J étant situés sur la droite de l'infini, et les directions isotropes OI et OJ (O est le centre de la transformation) étant perpendiculaires à elles-mêmes, les ombilics I et J ont respectivement pour éléments corrélatifs les droites OI et OJ. Or, les foyers d'une conique K sont les points de rencontre réels des couples de tangentes menées à K par les ombilics I et J. Les éléments corrélatifs de ces foyers seront donc les cordes communes à la conique corrélative de K et au couple de droites OI et OJ, c'est-à-dire les conjointes du centre O de la transformation, et de la conique corrélative de K.

A titre de corollaire immédiat de ce théorème, on peut remarquer que, si l'un des foyers de la conique K coïncide avec le centre O de la transformation, l'une des

conjointes du point O et de la conique corrélative étant rejetée à l'infini, cette conique corrélative est un cercle, résultat bien connu dont on pénètre ainsi la raison intime.

Le théorème précédent permettra de transformer les propriétés des foyers des coniques en propriétés de conjointes, et *vice versâ*. En particulier, on pourra considérer les systèmes de coniques ayant les mêmes cordes réelles communes avec un point donné, coniques qui pourront être dites *homoconjonctives* par rapport à ce point, et toutes leurs propriétés se déduiront corrélativement des propriétés bien connues des systèmes de coniques homofocales.

Mais, ici, nous nous attacherons surtout, c'est là le principal objet de cette Note, à faire voir comment le théorème précédent peut être utilisé pour déduire les propriétés focales des coniques des propriétés tout élémentaires de l'axe radical d'un cercle et d'un point.

3. Soient C un cercle, O un point, f l'axe radical de ce cercle et de ce point (droite équidistante du point O et de la polaire de ce point relativement au cercle C). Une transformation par polaires réciproques de centre O donne, comme courbe corrélative du cercle C, une conique K, qui est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que le point O est à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la circonférence du cercle C. Mais, dans tous les cas, cette conique K a pour foyers le point O et le point F corrélatif de la droite f.

4. Joignons le point O à un point M pris sur le cercle C; la tangente en M au cercle C coupe la droite f au point N; tirons ON et menons Oμ parallèlement à MN.

D'après une propriété fondamentale de l'axe radical f du point O et du cercle C, on a

$$NO = NM;$$

donc

$$\widehat{NOM} = \widehat{NMO} \quad \text{et} \quad \widehat{NOM} = \widehat{MO\mu} \text{ (1)}.$$

L'élément corrélatif du point M pris sur le cercle C est une tangente m à la conique K; celui de la droite f est le foyer F de la conique K, l'autre foyer étant au point O; celui de la tangente MN au cercle C est le point de contact P de la tangente m sur la conique K; ceux des points N et μ (ce dernier situé à l'infini dans la direction MN) sont les rayons vecteurs PF et PO. La transformation de la propriété précédente montre donc que l'angle de PF avec la tangente m est égal à l'angle de m avec PO. On obtient ainsi cette propriété classique :

La tangente en un point d'une conique est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui unissent le point de contact aux foyers de la conique.

5. Les polaires d'un point M, pris sur l'axe radical de deux cercles, relativement à ces deux cercles, se coupent sur leur axe radical, car elles sont elles-mêmes les axes radicaux du cercle de centre M orthogonal aux cercles donnés et de ces cercles. Lorsque l'un des cercles donnés se réduit à un point O, cette propriété devient : si la polaire, relativement à un cercle C, d'un

---

(1) Une transformation homographique permet de déduire de là le théorème suivant :

Les segments d'une tangente à une conique, compris entre le point de contact de cette tangente et ses intersections avec les conjointes d'un point par rapport à la conique, sont vus de ce point sous des angles égaux.

point M pris sur l'axe radical d'un point O et de ce cercle C coupe cet axe radical au point M′, l'angle MOM′ est droit. Transformant par polaires réciproques, on a ce théorème bien connu :

Le pôle d'une droite passant par le foyer F *d'une conique, relativement à cette conique, est sur la perpendiculaire élevée en* F *à cette droite;*

Ou bien :

La perpendiculaire menée par un foyer F *d'une conique au rayon vecteur d'un point* M *de cette conique coupe la tangente en* M *sur la directrice relative au foyer* F (¹).

6. Tout cercle dont le centre M est sur la droite f et qui passe par le point O coupe orthogonalement le cercle C, c'est-à-dire qu'il passe par les points de contact des tangentes menées de M au cercle C. La transformation par polaires réciproques de cette propriété montre que si F et F′ sont les foyers d'une conique K et que MM′ soit une corde de la conique passant par le foyer F, la parabole qui a F′ pour foyer et MM′ pour directrice, est tangente aux tangentes menées à la conique K par les points M et M′.

En outre, si μ et μ' sont les points de contact de ces tangentes et de la parabole, les angles MF′μ et M′F′μ'

(¹) On peut aussi remarquer, en observant que l'élément corrélatif du centre d'un cercle C est la directrice de la conique corrélative K, qui correspond au foyer confondu avec le centre O de la transformation, que cette propriété est également corrélative de celle-ci :

Toutes les normales à un cercle passent par le centre de ce cercle.

sont droits. Donc, d'après le théorème qui termine le n° 5, les points μ et μ' appartiennent à la directrice de la conique K relative au foyer F'. On est ainsi conduit à ce théorème qui ne nous semble pas avoir été déjà remarqué :

Une parabole qui a pour foyer un foyer F' *d'une conique* K *et pour directrice une droite quelconque passant par l'autre foyer* F *de la conique* K *et coupant cette conique aux points* M *et* M' *est tangente aux tangentes à la conique* K *menées par les points* M *et* M', *la corde de contact étant la directrice de la conique* K *relative au foyer* F'.

7. Soient f et f_1 les axes radicaux d'un point O et respectivement de deux cercles C et C_1. La perpendiculaire abaissée du point de rencontre de f et f_1 sur la ligne des centres C et C_1 est l'axe radical de ces deux cercles. La transformation par polaires réciproques, le point O étant toujours pris pour centre de la transformation, donne ce théorème qui nous semble également nouveau :

Si deux coniques ont en commun un foyer O, *leurs tangentes communes se coupent au point de rencontre de la droite qui joint les autres foyers* F *et* F_1 *et de la perpendiculaire élevée en* O *à la droite qui joint ce foyer au point de rencontre des directrices qui lui correspondent dans les deux coniques.*

8. Si t et t' sont les tangentes menées d'un point M à un cercle C, et que D soit un point pris sur la polaire du point M relativement au cercle C, la polaire d du point D passe par le point M, et les droites d et MD sont

conjuguées harmoniques par rapport aux droites t et t'.

Supposons alors que le point M se trouve sur l'axe radical f du point O et du cercle C, et que nous prenions pour point D le point de la polaire de M qui se trouve sur la polaire de O; la droite d se confond alors avec MO. Soient T et T′ les points de contact avec C des tangentes issues de M; puisque $MT = MT' = MO$, si par le point O nous élevons à OT et à OT′ les perpendiculaires ON et ON′ qui coupent MT et MT′ respectivement en N et N′, nous avons $TN = 2\,TM$, $T'N' = 2\,T'M$; par suite, la droite NN′ est symétrique de TT′ par rapport à M, et si cette droite coupe MD en E, OE est parallèle à f.

Cela posé, opérons une transformation par polaires réciproques de centre O. Au point M situé sur f correspond une droite passant par le foyer F de la conique K et coupant cette conique en deux points A et A′. Aux points N et N′ correspondent les normales à la conique K en A et A′, normales qui se coupent en B. Au point E correspond la parallèle à l'axe focal de la conique K, menée par le point B; si cette parallèle coupe AA′ au point C, le point C est dès lors corrélatif de la droite ME; mais nous venons de voir que la droite MD est conjuguée harmonique de MO par rapport aux tangentes MT et MT′; donc le point C est conjugué harmonique du point situé à l'infini sur AA′ par rapport aux points A et A′, c'est-à-dire que le point M est le milieu de AA′, et nous obtenons ce théorème connu :

Si par le point de rencontre des normales à une conique menées par les extrémités d'une corde focale, on mène une parallèle à l'axe focal de cette conique, cette droite passe par le milieu de la corde focale considérée.

9. Supposant toujours le point M situé sur l'axe radical f du point O et du cercle C, plaçons maintenant le point D à la rencontre de la polaire du point M relativement au cercle C et de la droite qui joint le centre de ce cercle au point O, c'est-à-dire au pôle de la droite f. La droite d coïncide alors avec la droite f, et nous voyons que MD est conjuguée harmonique de f par rapport aux tangentes au cercle C issues de M, ou, si ces tangentes coupent en H et en H′ la parallèle à f menée par D, que D est le milieu de HH′, et, par suite, que les angles HOD et DOH′ sont égaux.

Transformons toujours par polaires réciproques :

Au pôle D de la droite f correspond la directrice de la conique K relative au foyer F. On a donc ce théorème connu :

Si la corde AA′ *d'une conique passe par le foyer* F *de cette conique, les droites, qui joignent les extrémités* A *et* A′ *de cette corde au point de rencontre de la directrice relative au foyer* F *et de l'axe focal, sont également inclinées sur cet axe.*

10. Considérons un cercle C de centre Ω, un point O et une droite d quelconque perpendiculaire à OΩ. Joignons le point O à un point P mobile sur le cercle C; menons perpendiculairement à OP la droite OQ qui coupe d en Q, puis QR parallèle à la tangente PT menée en P en cercle C, c'est-à-dire perpendiculaire à PΩ. Nous avons

$$OQR = \widehat{OP\Omega} = \theta, \qquad \widehat{OQH} = \widehat{PO\Omega} = \varphi.$$

Donc, si nous abaissons du point O sur QR la perpendiculaire OR, nous avons

$$OR = OQ \sin\theta = OH \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = OH \frac{O\Omega}{P\Omega},$$

et comme OH, OΩ et PΩ sont constants, OR est aussi constant; par suite, la droite QR enveloppe un cercle de centre O.

Transformons par polaires réciproques. Nous avons une conique K ayant un foyer au point O. Au point P correspond une tangente t à cette conique; à la droite d, un point Δ de l'axe focal; au point Q, la perpendiculaire p abaissée de Δ sur t; à la droite QR qui joint le point Q au point situé à l'infini sur la tangente PT au cercle C, le point de rencontre de la droite p et du vecteur qui joint le foyer O au point de contact de la tangente t et de la conique K. D'ailleurs le cercle de centre O enveloppé par QR a pour corrélatif également un cercle de centre O. On a donc ce théorème connu :

Le lieu du point de rencontre du rayon vecteur qui unit un point M *mobile sur une conique à l'un des foyers de cette conique et de la perpendiculaire abaissée d'un point* Δ *de l'axe focal sur la tangente au point* M *est un cercle ayant pour centre le foyer* O.

Si l'on prend pour point Δ le second foyer F de la conique, on voit, en considérant le point M dans une position infiniment voisine de l'un des sommets de l'axe focal, que le rayon du cercle correspondant (cercle directeur) est égal à la longueur de cet axe. Rapprochant ce résultat du théorème obtenu au n° 4, on en déduit la propriété des rayons vecteurs dans les coniques.

11. Nous donnerons encore un exemple remarquable de la méthode que nous indiquons ici.

Supposons que le cercle C soit variable, mais ait constamment avec le point O même axe radical f. Considérons en outre un point fixe quelconque D. L'axe radical des points D et O considérés comme cercles de

rayon nul est la perpendiculaire élevée à DO en son milieu. Cette droite coupe f en un point K, et l'axe radical du point D et du cercle C passe constamment par le point K. Il en résulte que la polaire du point D relativement au cercle C passe constamment par le point D′ symétrique du point D par rapport au point K, point situé à la rencontre de DK et de la perpendiculaire élevée en O à OD.

Passons à la figure corrélative. Aux différents cercles C correspondent des coniques ayant toutes un foyer au point O et un foyer au point F, c'est-à-dire des coniques *homofocales*, et, si d est la droite corrélative du point D, nous voyons que les pôles de cette droite par rapport aux coniques du système sont situés sur une droite d', la corrélative du point D′. Le point K a pour élément corrélatif la droite qui joint le point F au symétrique du point O par rapport à la droite d. Cette droite coupe la droite d en un point M, et puisque l'angle DOD′ est droit, la droite d' est la perpendiculaire élevée en M à la droite d. De là ce théorème connu :

Les pôles d'une droite d relativement à un système de coniques homofocales sont situés sur la perpendiculaire menée à cette droite par le point où elle est coupée par la droite qui joint l'un des foyers au symétrique de l'autre par rapport à d.

Remarquant que la droite d est tangente au point M à une conique ayant pour foyers F et O, on peut énoncer encore ce théorème de la manière que voici :

Le lieu des pôles d'une droite d, relativement à un système de coniques homofocales, est la normale à celle de ces coniques qui touche la droite d menée par le point de contact de cette conique et de cette droite.

12. Nous nous bornerons aux exemples qui précèdent pour mettre en relief la fécondité de la méthode qui consiste à déduire les propriétés focales des coniques de la théorie des axes radicaux.

Pour terminer, nous ferons observer que réciproquement toute propriété des foyers conduit corrélativement à une propriété des conjointes d'un point et d'une conique, et, plus particulièrement, de l'axe radical d'un point et d'un cercle.

Exemple. — Prenons cette propriété connue : Soit MFM′ une corde focale de l'ellipse dont le grand axe est AA′; si l'on prolonge MA et M′A jusqu'à leurs points de rencontre Q et Q′ avec la directrice qui correspond au foyer F, l'angle QFQ′ est droit [1].

Appelons O le second foyer de la conique, et transformons par polaires réciproques en prenant le point O pour centre de la transformation. Nous obtenons ainsi ce théorème :

Soient f l'axe radical d'un point O *et d'un cercle* C, *et* P *le pôle de cet axe relativement au cercle* C. *Si les tangentes menées d'un point quelconque de f au cercle* C *coupent l'une des tangentes à ce cercle, parallèles à f, aux points* I *et* I′, *et que les droites* PI *et* PI′ *coupent la droite f aux points* H *et* H′, *l'angle* HOH′ *est droit.*

---

(1) Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*, t. II, 5e édition, p. 529, Ex. 916.

SUR LE RAYON DE COURBURE DES CONIQUES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Le théorème énoncé dans le numéro d'août 1894 (p. 338) des *Nouvelles Annales* n'est qu'un cas particulier de la proposition suivante :

(A) *Les coniques harmoniquement circonscrites à une conique et la touchant en un même point* M *ont, en ce point, le même rayon de courbure, égal à la moitié de celui de la conique.*

Prenons comme axes de coordonnées la tangente et la normale en M. La conique S a pour équation

$$(1) \qquad x^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0,$$

et le rayon de courbure au point M est égal au coefficient e.

La conique (1) a pour équation tangentielle

$$(2) \qquad e^2u^2 - 2beu + 2ev + b^2 - c = 0.$$

D'autre part, l'équation générale des coniques tangentes à la conique S au point M s'écrit :

$$(3) \qquad x^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey + y(mx + ny + p) = 0.$$

Pour exprimer que la conique représentée par l'équation (3) est harmoniquement circonscrite à la conique S, on sait qu'il suffit d'annuler la somme des produits des coefficients des termes correspondants dans les équations (2) et (3). On a ainsi la relation

$$e^2 - 2e\,\frac{(p + 2e)}{2} = 0,$$

ou

$$p = -3e.$$

Or le rayon de courbure ρ des coniques (3) est égal à $\frac{p-2e}{2}$. Remplaçons p par $-3e$, il vient

$$\rho = -\frac{e}{2},$$

ce qui démontre le théorème.

Dans le système des coniques harmoniquement circonscrites à la conique S et la touchant au point M se trouvent un cercle et une hyperbole équilatère. Le cercle, comme nous l'avons démontré ailleurs, est celui qui coupe orthogonalement le cercle orthoptique de la conique. La construction de son centre fournit immédiatement le centre de courbure de la conique au point M.

D'autre part, O étant le centre de la conique, le triangle ayant pour sommets le point O et les points à l'infini dans les directions des axes de la conique lui est conjugué.

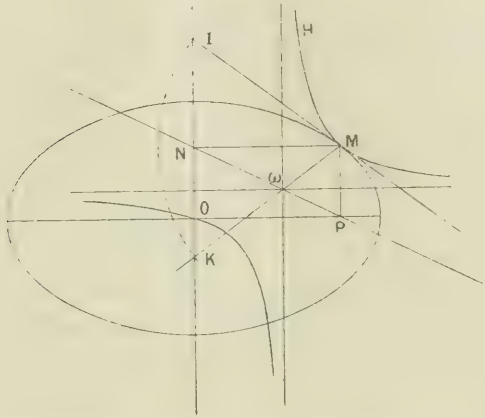
Toute conique circonscrite à ce triangle est une hyperbole équilatère. On peut alors énoncer le théorème suivant, corollaire du précédent :

Le rayon de courbure en un point M *d'une conique est égal au double de celui de l'hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de la conique, la touchant au point* M *et passant par son centre.*

On peut donc ramener la construction du centre de courbure au point M à la conique S à celui de l'hyperbole équilatère H au même point. Il suffit pour cela de déterminer le centre de la conique H. Ce centre est d'abord situé sur la droite PN, joignant les projections

du point M sur les deux axes [1]. D'autre part, dans une hyperbole, la tangente MI, une parallèle OI à une asymptote et le diamètre aboutissant au point M for-

Fig. 1.



ment un triangle isoscèle ; si donc on décrit du point M la circonférence de rayon MI, rencontrant OI au point K, la droite MK est un diamètre de l'hyperbole H. Son centre est donc au point d'intersection de MK avec PN.

De là résulte la construction suivante. Elle n'exige pas la connaissance des sommets ni des foyers de S, et est peut-être la plus simple solution du problème suivant :

Construire le centre de courbure en un point M *d'une conique non tracée, connaissant les axes en position seulement et la tangente au point* M.

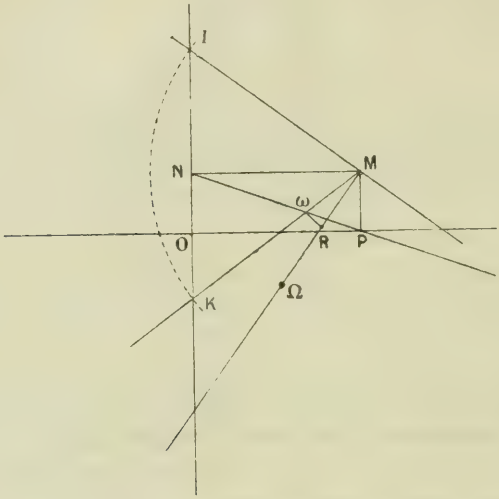
On prendra l'intersection ω de la droite NP, joignant

---

[1] D'après ce théorème : Si l'on mène par deux points d'une hyperbole les parallèles aux asymptotes, la seconde diagonale du parallélogramme formé passe par le centre.

les projections du point M sur les axes avec la droite MK, telle que MK = MI. La perpendiculaire ωR à Mω rencontrant la normale au point R, on portera RΩ = RM. Le point Ω sera le centre de courbure cherché.

Fig. 2.



Remarque. — Le théorème démontré au début peut être déduit d'une proposition bien plus générale, donnée par M. Jamet dans sa thèse *Sur les courbes et les surfaces tétraédrales*. M. Jamet démontre que les courbes, représentées par l'équation

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{y}{\beta}\right)^m + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^m = 0,$$

ont, en un point M, un rayon de courbure égal à la fraction $\frac{2}{1-m}$ de celui de la conique circonscrite au triangle de référence et touchant la courbe au point M. Si l'on fait $m = 2$, la courbe est une conique conjuguée

au triangle de référence et l'on voit que son rayon de courbure en M est égal au double de celui de la conique la touchant au point M et circonscrite au triangle de référence. On voit facilement qu'on déduit de ce résultat le théorème (A).

On démontrerait de même, directement, le théorème suivant, qui est également une conséquence du théorème de M. Jamet :

Les coniques circonscrites aux triangles circonscrits à une conique S *et la touchant en un point* M *ont, en ce point, le même rayon de courbure, égal au quart de celui de la conique* S.

En appelant F le foyer d'une parabole, I et J les points cycliques, le triangle FIJ est circonscrit à la parabole. Donc (résultat connu) :

Le rayon de courbure en un point M *d'une parabole est égal à quatre fois le rayon du cercle tangent à la parabole au point* M *et passant par son foyer.*

NOTE SUR LES ÉQUATIONS EN λ DE LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. L. SAUVAGE,
Professeur à la Faculté de Marseille.

1. On sait discuter les équations en λ des second, troisième et quatrième degrés, qui se rencontrent en Géométrie analytique, par exemple dans l'étude des couples de faisceaux de deux droites concourantes, dans celle des couples de coniques, dans celles des couples de surface du second ordre. *J'admettrai les résultats connus,* qui s'obtiennent par divers procédés. Je signa-

lerai cependant que c'est Painvin qui a traité complètement la question de l'équation en λ du quatrième degré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1867-1868).

Mais il est un point qui n'a pas été encore, à ma connaissance, signalé dans les Ovrages élémentaires, et qu'il ne me paraît plus possible de laisser aujourd'hui dans l'ombre après les beaux travaux de M. Weierstrass (*Monatsberichte,* 1868), de M. Darboux et de M. Jordan dans le *Journal de Liouville* (1874). Je veux parler de la notion de *diviseur élémentaire,* et c'est elle que je désire mettre en lumière dans cette Note.

2. Soient d'abord deux formes quadratiques binaires, c'est-à-dire à deux variables indépendantes

$$(1) \qquad f = A_{11} x_1^2 + A_{22} x_2^2 + 2 A_{12} x_1 x_2.$$

$$(2) \qquad f_1 = B_{11} x_1^2 + B_{22} x_2^2 + 2 B_{12} x_1 x_2.$$

Soient λ_1 et λ_2 les deux racines de l'équation

$$(3) \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} + \lambda B_{11} & A_{12} + \lambda B_{12} \\ A_{12} + \lambda B_{12} & A_{22} + \lambda B_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

On sait que l'on peut, en général, ramener les deux formes f et f_1 aux formes

$$(4) \qquad \varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2,$$

$$(5) \qquad \varphi_1 = X_1^2 + X_2^2,$$

où X_1 et X_2 représentent des formes linéaires indépendantes de x_1 et de x_2.

Discussion. Premier cas. — λ_1 et λ_2 sont des racines distinctes, c'est le cas des formules (4) et (5).

Deuxième cas. — λ_1 et λ_2 sont des racines égales entre elles, mais annulent à la fois tous les termes du

déterminant $\Delta(\lambda)$; on est ramené aux formes

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_1 X_2^2,$$
$$\varphi_1 = -X_1^2 - X_2^2,$$

qui ne diffèrent pas essentiellement des formes (4) et (5).

Troisième cas. — λ_1 est une racine double de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$, et n'annule pas tous les éléments de $\Delta(\lambda)$: on pose alors

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_2^2. \tag{6}$$
$$\varphi_1 = -2 X_1 X_2. \tag{7}$$

Il n'y a pas d'autre cas, si le déterminant $B_{12}^2 - B_{11} B_{22}$ n'est pas nul.

Reprenons la discussion, et, au lieu des racines de l'équation en λ, introduisons les diviseurs $\lambda_1 - \lambda$ ou, si l'on veut, $\lambda - \lambda_1$ du déterminant $\Delta(\lambda)$ supposé développé et ordonné par rapport à λ. Nous aurons les cas suivants :

Premier cas. — $\Delta(\lambda)$ admet deux diviseurs $\lambda - \lambda_1$ et $\lambda - \lambda_2$, et, si l'on a $\lambda_1 = \lambda_2$, les mineurs du premier ordre de $\Delta(\lambda)$, c'est-à-dire les éléments du déterminant $\Delta(\lambda)$, admettent aussi tous ensemble ce diviseur. On pose alors

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2,$$
$$\varphi_1 = -X_1^2 - X_2^2,$$

et l'on peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2$.

Deuxième cas. — $\Delta(\lambda)$ admet un diviseur double $\lambda - \lambda_1$ qui n'annule pas tous les mineurs de $\Delta(\lambda)$; on pose

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_2^2,$$
$$\varphi_1 = -2 X_1 X_2.$$

Dans le premier cas, on dira que le déterminant $\Delta(\lambda)$

admet *deux diviseurs élémentaires simples,* distincts ou non. Dans le second cas, on dira que le déterminant $\Delta(\lambda)$ admet un *diviseur élémentaire double.*

3. Soient maintenant deux formes quadratiques ternaires

$$(8)\quad \begin{cases} f = A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 \\ \qquad\qquad + 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{23}x_2x_3 + 2A_{31}x_3x_1. \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} f_1 = B_{11}x_1^2 + B_{22}x_2^2 + B_{33}x_3^2 \\ \qquad\qquad + 2B_{12}x_1x_2 + 2B_{23}x_2x_3 + 2A_{31}x_3x_1, \end{cases}$$

et λ_1, λ_2, λ_3 les trois racines de l'équation en (λ)

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} + \lambda B_{11} & A_{12} + \lambda B_{12} & A_{13} + \lambda B_{13} \\ A_{21} + \lambda B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} & A_{23} + \lambda B_{23} \\ A_{31} + \lambda B_{31} & A_{32} + \lambda B_{32} & A_{33} + \lambda B_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on suppose $A_{ij} = A_{ji}$ et $B_{ij} = B_{ji}$.

En outre, le déterminant

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix}$$

est supposé différent de zéro.

Appelons alors X_1, X_2, X_3 trois formes linéaires indépendantes de x_1, x_2, x_3; nous pouvons choisir ces formes de manière que les formes quadratiques f et f_1 soient simplifiées d'après les règles suivantes :

Premier cas. — λ_1, λ_2, λ_3 sont trois racines distinctes. On peut, au moyen d'une substitution convenable (en Géométrie, on fait un changement de coordonnées), ramener les formes f et f_1 aux formes

$$(10)\qquad \varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2,$$

$$(11)\qquad \varphi_1 = -X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.$$

Deuxième cas. — Les deux racines λ_1 et λ_2 sont égales et diffèrent de λ_3. Mais la racine λ_1 satisfait à toutes les équations obtenues en égalant à zéro les mineurs du premier ordre du déterminant $\Delta(\lambda)$.

On posera

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 - \lambda_1 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2,$$
$$\varphi_1 = - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.$$

Troisième cas. — Les trois racines λ_1, λ_2, λ_3 sont égales, et λ_1 satisfait non seulement aux équations précédentes, mais encore aux équations obtenues en égalant à zéro les mineurs du second ordre de $\Delta(\lambda)$, c'est-à-dire les éléments eux-mêmes de ce déterminant.

On posera

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 - \lambda_1 X_2^2 + \lambda_1 X_3^2,$$
$$\varphi_1 = - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.$$

Ces trois cas ne diffèrent pas essentiellement par les formes φ qui leur correspondent.

Quatrième cas. — Les deux racines λ_1 et λ_2 sont égales et diffèrent de λ_3. Mais les conditions du second cas ne sont pas satisfaites.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_1^2 + \lambda_3 X_3^2, \tag{12}$$
$$\varphi_1 = - 2 X_1 X_2 - X_3^2. \tag{13}$$

Cinquième cas. — Les trois racines λ_1, λ_2, λ_3 sont égales, mais les conditions du second cas sont satisfaites, et celles du troisième cas ne le sont pas.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_1^2 + \lambda_1 X_3^2,$$
$$\varphi_1 = - 2 X_1 X_2 - X_3^2.$$

Ce cas ne diffère pas essentiellement du précédent.

Sixième cas. — La racine triple λ_1 ne satisfait pas aux conditions du second cas.

On posera

$$(14) \qquad \varphi = \lambda_1(2X_3X_1 + X_2^2) + 2X_1X_2,$$

$$(15) \qquad \varphi_1 = -(2X_3X_1 + X_2^2).$$

4. Reprenons la discussion précédente en employant les diviseurs de $\Delta(\lambda)$ considéré comme un polynome du troisième degré en λ. En outre, les mineurs du premier ordre seront considérés comme des polynomes du second degré en λ, et les mineurs du second ordre, ou les éléments eux-mêmes du déterminant $\Delta(\lambda)$, seront des polynomes du premier degré en λ. Nous distinguerons alors les cas suivants :

Premier cas. — $\Delta(\lambda)$ admet trois diviseurs distincts $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$, $\lambda - \lambda_3$;

Ou bien, s'ils ne sont pas distincts, le diviseur double $\lambda - \lambda_1$ est aussi diviseur de tous les mineurs du premier ordre de $\Delta(\lambda)$;

Ou même, s'ils sont égaux, le diviseur triple $\lambda - \lambda_1$ est diviseur de tous les mineurs du second ordre de $\Delta(\lambda)$.

On posera

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2,$$

$$\varphi_1 = -X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.$$

Deuxième cas. — $\Delta(\lambda)$ admet deux diviseurs distincts $\lambda - \lambda_1$ et $\lambda - \lambda_2$, et le diviseur double $\lambda - \lambda_1$ n'est pas diviseur des mineurs du premier ordre ;

Ou bien, si λ_1 et λ_2 ne sont pas distincts, $\lambda - \lambda_1$ n'est pas diviseur de tous les mineurs de second ordre, mais est diviseur de tous ceux du premier ordre.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_1^2 + \lambda_2 X_3^2.$$

$$\varphi_1 = -2X_1X_2 - X_2^2.$$

Troisième cas. — Le diviseur triple $\lambda - \lambda_1$ n'est pas diviseur de tous les mineurs du premier ordre de $\Delta(\lambda)$.

On posera

$$\varphi = \lambda_1(2X_3X_1 + X_2^2) + 2X_1X_2,$$
$$\varphi_1 = -(2X_3X_1 + X_3^2).$$

Dans le premier cas, on dira que $\Delta(\lambda)$ admet trois *diviseurs élémentaires simples*. Il importe peu qu'ils soient distincts ou non comme *diviseurs linéaires*.

Dans le second cas, on dira que $\Delta(\lambda)$ admet un *diviseur élémentaire double* $\lambda - \lambda_1$ et un *diviseur élémentaire simple* $\lambda - \lambda_2$. On peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2$.

Dans le troisième cas, on dira que $\Delta(\lambda)$ admet un *diviseur élémentaire triple*.

5. Sans entrer dans les détails de la longue discussion de Painvin, on peut la ramener aux cas qui vont suivre.

Soient

$$f = A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + A_{44}x_4^2 + 2\Sigma A_{ij}x_iy_j,$$
$$f' = B_{11}x_1^2 + B_{22}x_3^2 + B_{33}x_3^2 + B_{44}x_4^2 + 2\Sigma B_{ij}x_iy_j$$

deux formes quadratiques quaternaires.

Considérons le déterminant symétrique

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} + \lambda B_{11} & A_{12} + \lambda B_{12} & A_{13} + \lambda B_{13} & A_{14} + \lambda B_{14} \\ A_{21} + \lambda B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} & A_{23} + \lambda B_{23} & A_{24} + \lambda B_{24} \\ A_{31} + \lambda B_{31} & A_{32} + \lambda B_{32} & A_{33} + \lambda B_{33} & A_{34} + \lambda B_{34} \\ A_{41} + \lambda B_{41} & A_{42} + \lambda B_{42} & A_{43} + \lambda B_{43} & A_{44} + \lambda B_{44} \end{vmatrix}$$

comme un polynome du quatrième degré en λ, et ses mineurs des ordres successifs comme des polynomes du troisième, du second et du premier degré.

Premier cas. — $\Delta(\lambda)$ a quatre diviseurs distincts $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$, $\lambda - \lambda_3$, $\lambda - \lambda_4$;

Ou bien, si $\lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient à tous les mineurs du premier ordre

Ou bien, si $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient à tous les mineurs du second ordre;

Ou bien, si $\lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient à tous les mineurs du troisième ordre, c'est-à-dire aux éléments eux-mêmes du déterminant $\Delta(\lambda)$.

On posera

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2,$$
$$\varphi_1 = -X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2,$$

et il importe peu que les valeurs λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 soient distinctes entre elles, si l'on ne considère que les formes φ.

Deuxième cas. — Le diviseur double $\lambda - \lambda_1$ ne convient pas à tous les mineurs du premier ordre; les autres diviseurs $\lambda - \lambda_2$ et $\lambda - \lambda_3$ sont distincts de $\lambda - \lambda_1$ et distincts entre eux;

Ou bien, si $\lambda_2 = \lambda_3$, le diviseur $\lambda - \lambda_2$ convient aux mineurs du premier ordre;

Ou bien, si $\lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient aux mineurs du premier ordre, mais non à ceux du second ordre;

Ou bien, si $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient une fois à tous les mineurs, excepté à ceux du troisième ordre.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_1^2 + \lambda_2 X_3^2 + \lambda_3 X_4^2,$$
$$\varphi_1 = -2X_1 X_2 - X_3^2 - X_4^2.$$

Il importe peu que λ_1, λ_2, λ_3 soient distincts.

Troisième cas. — Le diviseur triple $\lambda - \lambda_1$ ne convient pas aux mineurs du premier ordre; l'autre diviseur $\lambda - \lambda_2$ est distinct du précédent;

Ou bien, si $\lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient aux

mineurs du premier ordre, mais non à ceux du second ordre.

On posera

$$\varphi = \lambda_1(2X_3X_1 - X_2^2) + 2X_1X_2 + \lambda_2 X_4^2,$$
$$\varphi_1 = -(2X_3X_1 + X_2^2) - X_4^2.$$

Il importe peu que λ_1 et λ_2 soient des quantités différentes.

Quatrième cas. — Le diviseur quadruple $\lambda - \lambda_1$ ne convient pas aux mineurs du premier ordre.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1(X_1X_4 + X_2X_3) + (2X_1X_3 + X_2^2),$$
$$\varphi_1 = -2(X_1X_4 + X_2X_3).$$

Cinquième cas. — Les deux diviseurs doubles $\lambda - \lambda_1$ et $\lambda - \lambda_2$ ne conviennent séparément pas aux mineurs du premier ordre;

Ou bien, si $\lambda_1 = \lambda_2$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient deux fois aux mineurs du premier ordre, mais non à ceux du second ordre.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1X_2 + X_1^2 + 2\lambda_2 X_3X_4 + X_3^2,$$
$$\varphi_1 = -2X_1X_2 - 2X_3X_4.$$

6. On dira que le déterminant $\Delta(\lambda)$ admet dans le premier cas *quatre diviseurs élémentaires simples;*

Dans le second cas, *un diviseur élémentaire double* et *deux diviseurs élémentaires simples;*

Dans le troisième cas, *un diviseur élémentaire triple* et *un diviseur élémentaire simple;*

Dans le quatrième cas, *un diviseur élémentaire quadruple;*

Dans le cinquième cas, *deux diviseurs élémentaires doubles.*

7. Définissons maintenant les *diviseurs élémentaires* (*Elementartheiler* de M. Weierstrass). Posons

$$[P, Q] = \begin{vmatrix} pA_{11} + qB_{11} & \dots & pA_{1n} + qB_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ pA_{n1} + qB_{n1} & \dots & pA_{nn} + qB_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant $[P, Q]$ est une fonction entière et homogène du degré n en p et q. C'est donc le produit de n facteurs de la forme $ap + bq$, distincts ou non.

Nous dirons que $ap + bq$ est un *diviseur linéaire* de $[P, Q]$ par opposition à l'expression de *diviseur élémentaire* qui en sera distincte dans la suite.

Un mineur du premier ordre de $[P, Q]$ est aussi homogène en p et q. Soit l_1 l'exposant du diviseur linéaire $ap + bq$ qui entre à la fois dans tous les mineurs du premier ordre.

De même, soient l_2, l_3, ... les exposants du diviseur linéaire $ap + bq$ qui entre à la fois dans tous les mineurs du deuxième, du troisième ordre, etc.

Par symétrie, appelons l_0 l'exposant du diviseur linéaire $ap + bq$ dans le déterminant $[P, Q]$ lui-même.

Nous entendons par là que le plus grand commun diviseur des mineurs du premier ordre, par exemple, est divisible par $(ap + bq)^{l_1}$.

On aura d'abord

$$l_0 > l_1 > l_2 > l_3 > \dots.$$

Car, si les mineurs du troisième ordre, par exemple, sont divisibles par $(ap + bq)^{l_3}$, tout mineur du deuxième ordre étant une expression linéaire et homogène de mineurs du troisième ordre sera divisible aussi par $(ap + bq)^{l_3}$.

D'un autre côté, les dérivées partielles d'un mineur du second ordre par rapport à chacune des lettres p et

q sont aussi des fonctions linéaires et homogènes de mineurs du troisième, et admettent par suite le diviseur $(ap+bq)^{l_3}$.

D'après la règle connue des diviseurs multiples, on devra avoir

$$l_2 \geq l_3 + 1.$$

Cela posé, soient

$$l_0 - l_1 = e_0, \qquad l_1 - l_2 = e_1, \qquad \ldots, \qquad l_k = e_k,$$

si l_k est le dernier nombre l qui ne soit pas nul ; nous aurons

$$e_0 + e_1 + \ldots + e_k = l_0,$$

et, par suite,

$$(ap+bq)^{l_0} = (ap+bq)^{e_0}(ap+bq)^{e_1}\ldots(ap+bq)^{e_k}.$$

Chacun des diviseurs $(ap+bq)^e$ est appelé un *diviseur élémentaire* du déterminant [P, Q]. C'est donc un facteur du quotient des plus grands communs diviseurs respectifs des mineurs de deux ordres successifs.

Chaque diviseur élémentaire est essentiellement caractérisé par le rapport de deux coefficients a et b et par un exposant e. Le diviseur élémentaire est simple si $e = 1$, et d'un ordre de multiplicité e, si $e \neq 1$.

On peut représenter tous les diviseurs élémentaires dans un ordre quelconque par la notation

$$(a_1p+b_1q)^{e_1}, \quad (a_2p+b_2q)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (a_\rho p+b_\rho q)^{e_\rho}.$$

Mais les indices $1, 2, \ldots, \rho$ n'indiquent pas que les diviseurs linéaires a_ip+b_iq soient nécessairement distincts. Plusieurs peuvent être égaux entre eux.

On a de plus

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_\rho = n,$$

et le nombre ρ peut être égal ou supérieur au nombre des diviseurs linéaires distincts.

Si tous les diviseurs élémentaires fournis par le di-

viseur linéaire $(ap + bq)^{k+1}$ sont *simples*, le déterminant $[P, Q]$ sera divisible par $(ap + bq)^{k+1}$, ses mineurs du premier ordre seront divisibles par $(ap + bq)^k$, ...; ses mineurs de l'ordre k seront divisibles par $ap + bq$.

8. Reprenons, par exemple, le premier cas de Painvin, en faisant $p = 1$, $q = \lambda$.

Si l'on a

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4,$$

chaque diviseur linéaire $\lambda - \lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ divisera $\Delta(\lambda)$, mais ne divisera par tous les mineurs du premier ordre. On aura donc quatre diviseurs élémentaires simples.

Si l'on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 = \lambda_4,$$

le diviseur $\lambda - \lambda_1$ divisera deux fois $\Delta(\lambda)$, et une fois chaque mineur du premier ordre. On aura

$$l_0 = 2, \qquad l_1 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad e_0 = e_1 = 1,$$

et l'on obtiendra deux diviseurs élémentaires simples de la forme $\lambda - \lambda_1$ en même temps que les diviseurs élémentaires simples $\lambda - \lambda_3$ et $\lambda - \lambda_4$.

Si l'on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 = \lambda_4,$$

on aura quatre diviseurs élémentaires simples, égaux deux à deux, savoir deux diviseurs élémentaires simples

$$\lambda - \lambda_1 (\text{car } l_0 = 2,\ l_1 = 1,\ e_0 = e_1 = 1),$$

et deux diviseurs élémentaires simples

$$\lambda - \lambda_3 (\text{car } l_0 = 2,\ l_1 = 1,\ e_0 = e_1 = 1), \quad \ldots.$$

Ajoutons une remarque au premier cas de Painvin. On y fait l'hypothèse que $\lambda - \lambda_1$ est diviseur de tous les

mineurs du second ordre quand $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, et l'on ne parle pas des mineurs du premier ordre, car l'hypothèse faite est suffisante, d'après la théorie du n° 7, pour que $\lambda - \lambda_1$ soit un diviseur linéaire double des mineurs du premier ordre, et un diviseur linéaire triple de $\Delta(\lambda)$.

On peut revoir, au même point de vue, toutes les discussions du commencement de cette Note.

9. Voici, sans démonstrations, les propriétés générales des diviseurs élémentaires qu'on devra réunir à celles que l'on a déjà vues au n° 7.

Soient

$$P = \Sigma A_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2\Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$
$$Q = \Sigma B_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2\Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n; \qquad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}, \qquad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha})$$

deux formes quadratiques.

Le déterminant

$$[Q] = \begin{vmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

n'étant pas supposé nul, le déterminant $[P, Q]$ sera du degré n exactement.

Théorème I. — *Si la substitution*

$$x_\alpha = \sum_\gamma h_{\alpha\gamma} x'_\gamma \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, n)$$

transforme les deux formes quadratiques P *et* Q *en deux autres formes* P′ *et* Q′, *et, si le déterminant de la substitution n'est pas nul, les déterminants* $[P, Q]$ *et* $[P', Q']$ *ont les mêmes diviseurs élémentaires.*

Si l'on veut, un changement de coordonnées n'altère pas, non seulement les racines de l'équation en λ,

mais encore les diviseurs élémentaires du déterminant $\Delta(\lambda)$.

Théorème II. — *En supposant que*

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad (a_2 p + b_2 q)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (a_\rho p + b_\rho q)^{e_\rho}$$

soient les diviseurs élémentaires du déterminant $[P, Q]$, *choisissons deux nombres* g *et* h *qui n'annulent pas* $gP + hQ$, *et, en admettant que les valeurs* a_i *et* b_i, *dont le rapport seul est essentiel, satisfassent aux conditions*

$$g a_i + h b_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

on peut déterminer n *formes linéaires indépendantes*

$$X_0^i, \quad X_1^i, \quad \ldots, \quad X_{e_i-1}^i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho)$$

telles que l'on ait

$$P = \sum_i [a_i (X)_{e_i} - h (X)_{e_i-1}],$$

$$Q = \sum_i [b_i (X)_{e_i} + g (X)_{e_i-1}],$$

avec les conventions

$$(X)_0 = 0,$$
$$(X)_e = X_0 X_{e-1} + X_1 X_{e-2} + \ldots + X_{e-1} X_0.$$

On voit, en particulier, que, si tous les nombres e sont égaux à l'unité, on est ramené à la décomposition simultanée de deux formes quadratiques au moyen de n mêmes carrés.

Théorème III. — C'est la réciproque du théorème I. *Si les formes* P, Q, P', Q' *sont telles que les déterminants* $[P, Q]$ *et* $[P', Q']$ *aient les mêmes diviseurs élémentaires, on peut déterminer des constantes telles*

que la substitution

$$x_\alpha = \sum_\gamma h_{\alpha\gamma} x'_\gamma \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, n)$$

ait son déterminant différent de zéro et ramène P *à* P′ *et* Q *à* Q′.

Théorème IV. — C'est la réciproque du théorème II. *Prenons les nombres* $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ *et les constantes* g, h, a *et* b *sous les conditions*

$$\Sigma e_i = n,$$
$$ga_i - hb_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

et posons

$$P'_i = a_i(X)_{e_i} - h(X)_{e_i - 1},$$
$$Q'_i = b_i(X)_{e_i} + g(X)_{e_i - 1},$$
$$P' = \Sigma P'_i,$$
$$Q' = \Sigma Q'_i.$$

Remplaçons maintenant les X *par des formes linéaires indépendantes en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *nous obtiendrons les formes* P *et* Q les plus générales, *telles que le déterminant* [P, Q] *ait pour diviseurs élémentaires les diviseurs* $(a_i p + b_i q)^{e_i}$.

Ce théorème est très important, et explique la règle suivante. Considérons un déterminant de la forme

$$[P_i, Q_i] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_1 - \lambda \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 - \lambda & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_1 - \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Il admet un seul diviseur élémentaire $(\lambda_1 - \lambda)^{l_i}$.

Formons un Tableau de ρ déterminants analogues dont les diagonales principales se succèdent sur une ligne unique qui servira de diagonale à un grand déter-

minant [P, Q]. Tous les éléments de [P, Q] n'entrant pas dans les $[P_i, Q_i]$ sont supposés nuls. On obtiendra ainsi la *forme canonique* du déterminant [P, Q] qui a n diviseurs élémentaires égaux à

$$(a_i p + b_i q)^{e_i} (i = 1, 2, \ldots, \rho).$$

On n'a pas procédé autrement pour trouver les formes φ et φ_1 dans la discussion du problème de Painvin.

Théorème V. — *Pour que* P *et* Q *se ramènent à des sommes de carrés positifs ou négatifs, il faut et il suffit que tout diviseur linéaire du degré l dans* [P, Q] *soit un diviseur des mineurs de l'ordre $l - 1$.*

Ce théorème est toujours applicable quand les deux formes P et Q sont à coefficients réels, et que l'on peut trouver une forme $gP + hQ$ qui ne s'annule pour aucun système de valeurs réelles $x_1, \ldots, x_n$, si ce n'est pour des valeurs toutes égales à zéro.

Par exemple, soient les deux formes

$$f = \Sigma A_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2 \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$
$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Puisque la forme f_1 ne peut s'annuler qu'en égalant à zéro toutes les variables x, après exclusion des solutions imaginaires, il est nécessaire que le déterminant $\Delta(s)$, où s remplace la lettre λ employée jusqu'ici, n'ait que des diviseurs élémentaires simples et réels.

Comme corollaire de la proposition, on voit que toute *équation en s* a toutes ses racines réelles, que chaque racine double annule les mineurs du premier ordre de $\Delta(s)$, etc.

On remarquera qu'un déterminant $\Delta(\lambda)$, qui n'a que des diviseurs élémentaires simples et réels, peut s'ap-

peler généralement un déterminant en s, car on peut le ramener à la forme ordinaire $\Delta(s)$ par l'application des théorèmes précédents.

10. Si les déterminants [P] et [Q] sont nuls, on cherchera deux nombres m et n tels que le déterminant

$$[Q_1] = [mP + nQ]$$

ne soit pas nul, et l'on substituera la forme Q_1 à la forme Q avant d'appliquer les principes précédents.

Mais il peut arriver qu'*il n'existe aucune forme* Q_1 *dont le déterminant ne soit pas nul.* Dans ce cas, M. Darboux a montré qu'on peut ramener les deux formes P et Q à l'étude d'autres formes P′ et Q′ *d'un nombre moindre de variables indépendantes* et satisfaisant aux principes précédents.

Il me semble inutile de chercher des démonstrations des propositions énoncées dans cette Note en dehors des *Méthodes parfaites* de M. Darboux (*Journal de Liouville*, 1874). A peine, dans quelques cas très simples de Géométrie analytique, peut-on essayer des procédés spéciaux. Nous renverrons donc au *grand Mémoire* de M. Darboux le lecteur dont cette Note aura excité l'intérêt.

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ROMUALD BLAZEÏEVSKI.

L'équation

$$(1 - nyD)y_1^2 + m_1 y_1 - \tfrac{1}{4}(k - lD) = 0$$

et les deux autres qu'on obtient en changeant $m_1 y_1$ en

$m_2 y_2$, $m_3 y_3$ donnent pour y_i les expressions contenant les radicaux $\sqrt{D-a}$, $\sqrt{D-b}$, $\sqrt{D-c}$. Posons, pour abréger,

$$m_1(D-a)=\alpha, \qquad m_2(D-b)=\beta, \qquad m_3(D-c)=\gamma,$$
$$F_0=\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}, \qquad F_1=\sqrt{\gamma}-\sqrt{\alpha}, \qquad F_2=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta};$$
$$G_0=\frac{1}{m_2}\sqrt{\beta}-\frac{1}{m_3}\sqrt{\gamma}, \qquad G_1=\ldots, \qquad G_2=\ldots,$$

désignons par F', G' les F et les G où le signe moins est remplacé par le signe plus.

Nous aurons

$$F_0F'_0=m_2(D-b)-m_3(D-c),$$
$$G_0G'_0=\frac{D-b}{m_2}-\frac{D-c}{m_3}$$

ou bien

$$1-m_1D=\frac{l}{m_2-m_3}G_0G'_0, \qquad Dl-k=\frac{l}{m_2-m_3}F_0F'_0.$$

L'équation déterminant y_1 sera

$$lG_0G'_0y_1^2+m_1(m_2-m_3)y_1+\tfrac{1}{4}lF_0F'_0=0.$$

Soit A une constante numérique, faisons

$$G_0y_1=AF_0,$$

substituons dans l'équation et divisons le premier membre par F_0G_0, on trouve

$$A^2lF_0G'_0+m_1(m_2-m_3)A+\tfrac{1}{4}lG_0F'_0=0;$$

mais

$$F_0G'_0=(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})\left(\frac{1}{m_2}\sqrt{\beta}+\frac{1}{m_3}\sqrt{\gamma}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_2}\right)(-1+\sqrt{\beta\gamma}),$$

$$G_0F'_0=\left(\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_2}\right)(-1-\sqrt{\beta\gamma})-(A^2-\tfrac{1}{4})\left(\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_2}\right)$$
$$-(A^2-\tfrac{1}{4})\sqrt{\beta\gamma}\left(\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_2}\right)+m_1(m_2-m_3)=0.$$

Pour satisfaire à cette équation, supposons $A = \pm \frac{1}{2}$, ainsi

$$y_1 = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{\frac{\sqrt{\beta}}{m_2} - \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3}},$$

de même on pourrait constater que

$$y_2 = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\gamma} - \sqrt{\alpha}}{\frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} - \frac{\sqrt{\alpha}}{m_2}}, \qquad y_3 = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\frac{\sqrt{\alpha}}{m_1} - \frac{\sqrt{\beta}}{m_2}}.$$

Les y sont liés par la relation

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{D},$$

équation rationnelle et homogène par rapport à $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$,

$$F_0 G_1 G_2 + F_1 G_0 G_2 + F_2 G_0 G_1 = \frac{2}{D} G_0 G_1 G_2.$$

Mais

$$G_1 G_2 = \frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{m_1 m_3} - \frac{\alpha}{m_1^2} - \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{m_2 m_3},$$

$$F_0 G_1 G_2 = (c - b) \frac{\sqrt{\alpha}}{m_1} + \left(\frac{D - c}{m_2} - \frac{D - a}{m_1}\right) \sqrt{\beta}$$
$$+ \left(\frac{D - a}{m_1} - \frac{D - b}{m_2}\right) \sqrt{\gamma} + \left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_2}\right) \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{m_1},$$

$$F_1 G_0 G_2 = (a - c) \frac{\sqrt{\beta}}{m_2} + \left(\frac{D - a}{m_3} - \frac{D - b}{m_2}\right) \sqrt{\gamma}$$
$$+ \left(\frac{D - b}{m_2} - \frac{D - c}{m_3}\right) \sqrt{\alpha} + \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3}\right) \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{m_2},$$

$$F_2 G_0 G_1 = (b - a) \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} + \ldots$$

$$G_0 G_1 G_2 = \left(\frac{D - b}{m_2} - \frac{D - c}{m_3}\right) \frac{\sqrt{\alpha}}{m_1}$$
$$+ \left(\frac{D - c}{m_3} - \frac{D - a}{m_2}\right) \frac{\sqrt{\beta}}{m_2}$$
$$+ \left(\frac{D - a}{m_1} - \frac{D - b}{m_2}\right) \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3}.$$

L'équation sera

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{aligned} &(m_3 - m_2)\left(m_1 \mathrm{D}^2 - \mathrm{D} + \frac{2}{m_1}\right)\sqrt{\alpha} \\ &+ (m_1 - m_3)\left(m_2 \mathrm{D}^2 - \mathrm{D} + \frac{2}{m_2}\right)\sqrt{\beta} \\ &+ (m_2 - m_1)\left(m_3 \mathrm{D}^2 - \mathrm{D} + \frac{2}{m_3}\right)\sqrt{\gamma} = 0. \end{aligned}\right.$$

Comme il est facile de se convaincre, le facteur de $\sqrt{\alpha}$ est

$$\frac{c-b}{m_1} + \frac{\mathrm{D}-b}{m_2} - \frac{\mathrm{D}-c}{m_1}$$
$$+ \frac{\mathrm{D}-b}{m_1} - \frac{\mathrm{D}-c}{m_3} - \frac{2}{m_1 \mathrm{D}}\left(\frac{\mathrm{D}-b}{m_2} - \frac{\mathrm{D}-c}{m_3}\right),$$

ou bien

$$\frac{2(c-b)}{m_1} + \left(1 - \frac{2}{m_1 \mathrm{D}}\right)\left(\frac{\mathrm{D}-b}{m_2} - \frac{\mathrm{D}-c}{m_3}\right),$$

mais

$$\frac{c}{m_3} - \frac{b}{m_2} = c\left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1}\right) - b\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) - \frac{c-b}{m_1} = \frac{b-c}{m_1};$$

le facteur de $\sqrt{\alpha}$ est

$$2\frac{c-b}{m_1} + (c-b)\left(1 - \frac{2}{m_1 \mathrm{D}}\right)\left(\mathrm{D} - \frac{1}{m_1}\right),$$

qu'on peut écrire

$$\frac{m_3 - m_2}{l\mathrm{D}}\left(\frac{2}{m_1} - \mathrm{D} + m_1 \mathrm{D}^2\right).$$

On a pris dans l'expression

$$y_1 = \pm \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{\dfrac{\sqrt{\beta}}{m_2} - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{m_3}}$$

le signe supérieur.

Toutes les combinaisons de signes sont au nombre

de quatre, car $G'_0 y_1 = \frac{1}{2} F'_0$ est aussi une solution, mais peut-être y a-t-il quelques conditions limitant le nombre de solutions.

L'analyse précédente nous enseigne que le problème dépend seulement de $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}, \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma}}$. Si l'on suppose, M, N étant des constantes,

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}} = M \cos\theta, \qquad \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma}} = N \sin\theta,$$

on peut exprimer les quantités y_i par les fonctions trigonométriques et l'argument θ sera déterminé par l'équation (E) : il se peut que θ soit complexe, de la forme $\theta' + \theta'' i$; cela introduira les fonctions hyperboliques.

Nous avons

$$m_1(D - a) = M^2 m_3(D - c)\cos^2\theta,$$
$$m_2(D - b) = N^2 m_3(D - c)\sin^2\theta;$$

on doit avoir l'identité, quel que soit D,

$$N^2 m_1(D - a) + M^2 m_2(D - b) = M^2 N^2 m_3(D - c),$$
$$m_1 N^2 + m_2 M^2 = m_3 M^2 N^2,$$
$$m_1 a N^2 + m_2 b M^2 = M^2 N^2 m_3 c,$$
$$M^2 = \frac{m_1(b - a)}{m_3(b - c)}, \qquad N^2 = \frac{m_2(b - a)}{m_3(c - a)}.$$

Pour que la substitution soit réelle, il faut qu'on ait

$$b > c > a,$$
$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} > \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} > \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3},$$

ou bien

$$m_1 < m_2 < m_3,$$

ou bien

$$\varpi_1 < \varpi_2 < \varpi_3.$$

En disposant les données du problème dans un tel ordre, on est assuré que M, N sont réels.

Je vais ajouter quelques remarques au sujet de l'élimination. Soit C le cercle circonscrit au triangle cherché; nous avons posé

$$h\,D^2 = \frac{1}{x^2}, \qquad l\,D^3 = \frac{q}{x^3}, \qquad Dx = q_0;$$

on a

$$kq_0^2 = 1, \qquad lq_0^3 = q, \qquad q = \frac{l}{k^{\frac{3}{2}}};$$

les x_i satisfont à l'équation

$$t^3 - z\,t^2 - y\,t - \frac{q}{z}(y-1) = 0.$$

Supposons que w_i varient de façon que les cercles inscrit et circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$ restent invariables. On a

$$z_1\zeta_1 = z_2\zeta_2 = z_3\zeta_3 = \frac{w_1w_3w_2}{D}x_1x_2x_3 = C,$$

en désignant par C une constante indépendante de $w_1w_2w_3$, comme

$$l = m_1m_2m_3 = \frac{w_1w_2w_3}{w_2w_3 \cdot w_1w_3 \cdot w_1w_2} = \frac{1}{w_1w_2w_3},$$

on a

$$x_1x_2x_3 = l\,CD.$$

Ainsi

$$\frac{q}{z}(y-1) = l\,CD,$$

mais

$$z = x - x^3 = \frac{q_0}{D} - \frac{q_0^3}{D^3} = \frac{q_0}{D}\left(1 - \frac{1}{kD^2}\right),$$

$$y - 1 = \frac{l}{q}CD\left(1 - \frac{1}{kD^2}\right)\frac{q_0}{D} = C\left(k - \frac{1}{D^2}\right);$$

C est une fonction rationnelle de D; je ne cite pas ici la démonstration de la formule

$$C = \frac{(lD - k)D^4}{4(kD^2 - 1) - 8lD^3}$$

qui ne présente aucune difficulté, mais est seulement assez longue, comme toutes celles fondées sur la théorie des fonctions symétriques.

NOTE SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE DE TRANSFORMATION ET SUR LES QUARTIQUES UNICURSALES;

PAR M. G. LEINEKUGEL,
Élève au lycée Charlemagne.

Nous nous proposons d'exposer une méthode nouvelle de transformation dans laquelle correspond à un point une conique, circonscrite à un triangle donné, qui constitue la figure de référence de cette méthode de transformation, à une droite un point, et à une conique une quartique unicursale. Toutes les propriétés *projectives* des coniques permettront d'énoncer immédiatement des propriétés relatives aux quartiques unicursales. Nous retrouverons, en particulier, par une voie purement géométrique, quelques-unes des propriétés de ces courbes que M. Astor a énoncées dans un Article très intéressant paru dans les *Nouvelles Annales*.

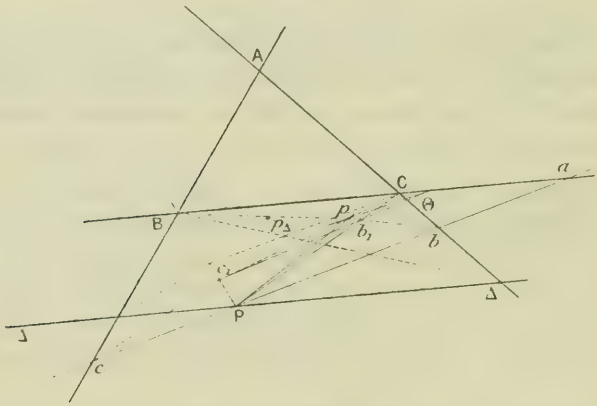
Les deux propriétés qui servent de base à cette méthode de transformation sont les suivantes :

I. *Étant donnés un triangle et un point* P, *on considère une série de droites pivotant autour de ce point, les droites qui joignent deux des sommets du triangle aux points de rencontre de ces droites avec les côtés opposés se coupent en un point qui décrit une conique* (P).

II. *Lorsque le point* P *décrit une droite* Δ, *les coniques correspondant aux différents points de cette droite passent par un quatrième point fixe.*

I. En effet, soit Pcb une de ces droites qui rencontre en b, c les côtés AC, AB du triangle donné ABC. Les droites Cc, Bb sont évidemment deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques de sommets B, C. Le point p de rencontre de ces droites décrit, par suite, une conique (P), passant par les trois sommets A, B, C (BA, CA étant évidemment deux rayons homologues) du triangle. Les tangentes en B, C sont les droites PB, PC qui sont les rayons correspondants de BC, dans les deux faisceaux. Quant à la tangente en A, c'est la droite

Fig. 1.



conjuguée harmonique de PA par rapport aux deux côtés AB, AC du triangle. Ceci résulte de la construction de la tangente en un point quelconque p de (P). D'après le théorème de Pascal, la tangente en p à (P) rencontre BC au même point Θ que la droite b_1c_1 qui joint les points b_1, c_1 de rencontre des droites PC, Bb; PB, Cc. Or les droites pΘ et pP sont deux diagonales du quadrilatère formé par les quatre points B, C, b_1, c_1 (*fig.* 1), qui forment bien avec les côtés Cp, Bp un faisceau harmonique.

Cette conique (P), qui correspond au point P, est donc bien déterminée.

Voici un autre mode de génération de cette conique (P) :

Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point P *aux coniques passant par deux sommets* B, C *d'un triangle* ABC *et rencontrant les deux autres côtés en deux points situés en ligne droite avec* P *est la conique* (P).

Ou, ce qui revient au même, d'après le théorème de Desargues :

Étant donné un triangle ABC *on considère une série de droites pivotant autour d'un point* P, *le lieu des points doubles de l'involution déterminée par les deux couples de points* (P, a), (b, c) *est la conique* (P).

Ce dernier mode de génération de (P) permet de construire ses directions asymptotiques, puisqu'il suffit de tracer les deux droites Pa, bc qui sont telles que les milieux des segments Pa, bc coïncident. Ces droites passeront donc par les deux points communs à la droite et à la conique lieu des points milieux des segments Pa, bc.

II. Cette propriété résulte immédiatement du premier mode de génération de la conique (P). Si le point P se déplace sur une droite Δ, le réseau des coniques (P) qui correspondent aux différents points de cette droite passeront toutes par le point p_Δ obtenu comme précédemment, Pcb coïncidant avec Δ (*fig.* 1).

Courbe transformée d'une courbe donnée. — Nous supposons maintenant que le point P décrit une courbe quelconque (C) de degré m, aux différents points P correspondent des coniques (P) dont l'enveloppe est

une courbe (Γ) qui est la *transformée* de la courbe (C). Nous nous proposons de tracer cette courbe par points et par tangentes et d'en indiquer le degré dans le cas général.

Au point P de la courbe (C) correspond une conique (P), définie comme il a été dit plus haut; à la tangente Δ à (C) en ce point correspond un point p, appartenant à (P); je dis que c'est en ce point que la conique (P) touche son enveloppe (Γ). En effet, considérons une sécante passant par P et infiniment voisine de Δ, elle rencontre (C) en des points dont l'un d'eux P′ est infiniment voisin de P, et auquel correspond une conique (P′) rencontrant (P) au point p', infiniment voisin de p puisqu'il correspond à Δ'. Quand Δ' se rapproche de Δ, p' tend vers p qui est bien, par suite, le point où (P) touche son enveloppe.

Le point p décrit donc la courbe (Γ); la tangente en ce point à (Γ) coïncidant avec celle de la conique (P) d'après le théorème fondamental des enveloppes, est donc la droite $p\Theta$ conjuguée harmonique de Pp par rapport à Bp, Cp.

Si la tangente Δ passe en l'un des sommets A, B, C, on voit que le point p vient se confondre avec l'un de ces points. Nous en déduisons que la courbe (Γ) admet les trois points A, B, C comme points multiples d'ordre $c = m(m-1)$, c étant la classe de la courbe (C) en général. De plus, d'après la construction de la tangente en p à la courbe (Γ), on voit que les tangentes en B, C sont les $m(m-1)$ tangentes que l'on peut mener de ces points à (C) et qu'en A ces tangentes sont les conjuguées harmoniques par rapport aux côtés AB, AC des tangentes menées de ce point à (C).

Il résulte aussi du mode de transformation que, dans le cas où la courbe (C) n'est pas tangente à BC, il n'y a

pas de points de (Γ) en dehors de B, C sur la droite BC, qui rencontre, par suite, (Γ) en un nombre de points M égal à son degré, $2m(m-1) = M$. Plus généralement, c étant la classe de (C), le degré de (Γ) est $M = 2c$.

Remarque I. — Dans le cas particulier où (C) est tangente en t points à BC, le degré s'abaisse à $2(c-t)$.

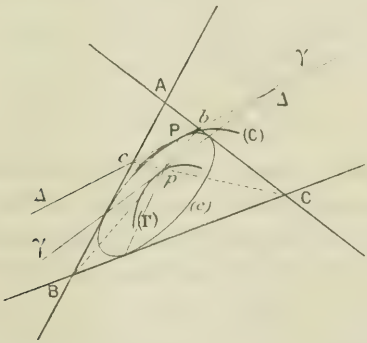
Remarque II. — Le degré de la courbe (Γ) peut se déduire aussi de cette remarque, que d'un point du plan on peut mener à la courbe (C) un nombre de tangentes égal à $c = m(m-1)$, en général. Par suite, la conique qui correspond à ce point rencontre la courbe (Γ) en $c - m(m-1)$ points en dehors des sommets qui comptent pour $3m(m-1)$, total en $4m(m-1)$ points et, d'après le théorème de Bezout, le degré de (Γ) sera

$$M = \tfrac{1}{2}[4m(m-1)] = 2m(m-1).$$

A une conique inscrite dans le triangle ABC *correspond une droite.*

En effet, soit Δ une tangente à cette conique (C) (*fig.* 2);

Fig. 2.



on sait que étant données deux coniques bitangentes à une troisième, les cordes des contacts et les sécantes

communes concourent en un même point et forment un faisceau harmonique. Or ici les coniques (Δ, BC), (AB, CA) étant bitangentes à (C), les sécantes communes Cc, Bb se coupent en p situé sur la corde de contacts γ de (C) avec AC, AB. Cette droite γ est donc la transformée de (c).

Cette droite est une tangente commune à toutes les coniques (P), correspondant aux différents points P de (c), les points de contact correspondants étant, sur cette droite, les points p obtenus comme il a été dit plus haut.

Il résulte de là que, si l'on considère une tangente γ à la courbe (Γ) en p, la conique (c) dont cette droite est la transformée est inscrite dans le triangle et est tangente à la courbe (C) en P.

Des considérations précédentes nous déduisons les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Une courbe* (Γ) *de degré* $2m(m-1)$ *dont on connaît trois points multiples d'ordre* $m(m-1)$ *est complètement déterminée quand on l'assujettit à être tangente à* $\frac{m(m+3)}{2}$ *coniques circonscrites au triangle* ABC *formé par les trois points multiples donnés.*

Il suffira, en effet, de construire les $\frac{m(m+3)}{2}$ points correspondants à ces coniques, qui déterminent la courbe (C) dont (Γ) est la transformée. On passe évidemment d'une conique (P) au point correspondant P en prenant le pôle de BC par rapport à cette conique.

Théorème II. — *Une courbe* (Γ) *de degré* $2m(m-1)$ *dont on connaît trois points multiples d'ordre* $m(m-1)$ *est déterminée quand on en donne* $\frac{m(m+3)}{2}$ *points.*

C'est qu'en effet les $\frac{m(m+3)}{2}$ droites, dont ces points sont ceux qui y correspondent, déterminent une courbe (C).

Théorème III. — *Étant donnée une courbe* (Γ) *de degré* $2m(m-1)$ *admettant trois points multiples d'ordre* $m(m-1)$, *on peut par un point du plan mener* m *coniques tangentes à cette courbe et circonscrites au triangle formé par les trois points multiples.*

C'est la transformation de cette propriété : qu'une droite quelconque rencontre la courbe (C) dont (Γ) est la transformée, en m points.

Théorème IV. — *Étant donnés une courbe* (C) *de classe* c *et un quadrilatère, le nombre des coniques inscrites dans ce quadrilatère et tangentes à cette courbe est* $c(c+1)$.

Considérons le triangle ABC formé par trois des côtés du quadrilatère et la courbe (C); en appliquant notre méthode de transformation, nous avons à démontrer cette propriété : d'un point Q du plan on peut mener à la courbe (Γ) $c(c+1)$ tangentes.

Le point Q est le correspondant du quatrième côté du quadrilatère. Nous avons vu que le degré de (Γ) était $2c$; comme elle admet trois points d'ordre c qui comptent pour $\frac{3c(c-1)}{2}$ points doubles, sa classe C est par suite

$$C = 2c(2c-1) - 2\left[\frac{3c(c-1)}{2}\right] = c(c+1). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Application aux courbes du second degré. Quartiques unicursales et coniques.

En appliquant ces considérations générales au cas où

la courbe (C) est une conique, nous voyons qu'à une conique correspond une quartique admettant les trois sommets du triangle ABC comme points doubles.

Les théorèmes énoncés précédemment donnent comme cas particuliers les suivants relatifs aux quartiques unicursales à points doubles réels.

1° *Une quartique dont on connaît trois points doubles est déterminée quand on l'assujettit à être tangente à cinq coniques circonscrites au triangle formé par les trois points doubles.*

2° *Une quartique dont on connaît trois points doubles est déterminée quand on en donne cinq points.*

3° *Une quartique unicursale à points doubles réels étant donnée, on peut, par un point du plan, mener deux coniques circonscrites au triangle formé par les points doubles et tangentes à cette quartique.*

Le dernier théorème IV donne lieu à une propriété relative aux coniques.

4° *Il existe six coniques inscrites dans un quadrilatère et tangentes à une conique donnée.*

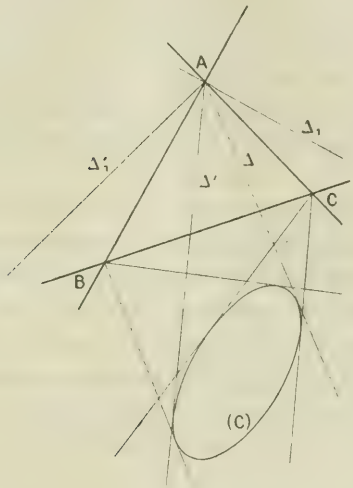
Cette méthode de transformation conduit à des démonstrations géométriques simples des deux théorèmes connus :

Théorème. — *Les six tangentes aux trois points doubles d'une quartique unicursale sont tangentes à une même conique.*

Soit (*fig.* 3) une conique (C); les tangentes en A, B, C à la quartique unicursale (Γ) transformée de (C) sont, d'après ce qui a été dit plus haut, pour les points B, C les tangentes menées de ces points à (C) et pour A les deux droites Δ_1, Δ'_1 conjuguées harmoniques par

rapport à AB, AC des deux tangentes Δ, Δ' menées de A à (C). Je dis que ces six droites sont tangentes à une même conique. Ceci résulte immédiatement du

Fig. 3.



théorème corrélatif de celui de Desargues. Les droites AC, AB; Δ, Δ' déterminent un faisceau involutif dont les rayons homologues sont les tangentes menées de A aux coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes menées de B, C à (C).

Or le rayon homologue de Δ_1, conjuguée harmonique de Δ par rapport à AB, AC, est évidemment Δ'_1, ce qui démontre la proposition.

Cette propriété montre que cinq des six tangentes aux trois points doubles d'une quartique étant données la sixième en résulte; elle donne un moyen simple de la construire.

Théorème. — *Dans toute quartique admettant trois*

points de rebroussement les tangentes en ces points sont concourantes.

Il suffit, pour démontrer cette proposition, de considérer la quartique (Γ), transformée d'une conique (C) circonscrite au triangle ABC formé par les trois points de rebroussement. Les tangentes de rebroussement de la quartique sont, en effet, les tangentes en B, C à (C) qui se coupent en P et la droite AP conjuguée harmonique par rapport à AB, AC de la tangente en A à (C).

Propriétés des quartiques unicursales déduites des coniques. — Notre méthode de transformation appliquée aux propriétés *projectives* des coniques nous permet d'énoncer immédiatement des propriétés relatives aux quartiques unicursales à points doubles réels.

Voici quelques-unes des transformations des propriétés les plus élémentaires des coniques; pour simplifier les énoncés de ces propriétés nous entendrons par quartiques (Γ) les quartiques circonscrites à un triangle ABC dont les sommets sont trois points doubles.

Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques circonscrites à un quadrilatère est une conique.

On considère quatre coniques circonscrites à un triangle ABC et le réseau des quartiques (Γ) tangentes à ces quatre coniques. Si par un point donné on fait passer les deux couples de coniques circonscrites de ABC et tangentes à ces quartiques, pour chacune de ces quartiques il existe une conique (S) circonscrite au triangle et passant par les deux points de contact. L'enveloppe de ces coniques (S) est une quartique admettant A, B, C comme points doubles.

En effet, aux quatre points correspondent quatre coniques; à la droite Δ donnée correspond un point fixe Q; aux deux tangentes Θ_1, Θ'_1 à l'une des coniques (C_1) (circonscrite au quadrilatère donné), aux points où la droite Δ la rencontre, correspondent les deux points t_1, t'_1 de contact avec la quartique (Γ_1) du réseau des deux coniques passant par Q et circonscrites à ABC. Finalement, au pôle de Δ, par rapport à (C_1), correspond la conique (S) circonscrite au triangle et passant par les deux points t_1, t'_1.

L'enveloppe des polaires d'un point fixe, par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère, est une conique.

On considère les quartiques (Γ) circonscrites à un quadrilatère fixe et une conique fixe circonscrite à ABC, qui rencontre chacune des quartiques (Γ) en deux points; les deux coniques circonscrites à ABC et tangentes en ces points aux quartiques se coupent en un quatrième point qui décrit une quartique admettant A, B, C comme points doubles.

Les polaires d'un point fixe par rapport aux coniques circonscrites à un quadrilatère passent par un point fixe.

On considère cinq coniques fixes circonscrites à ABC et le réseau des quartiques (Γ) tangentes à quatre de ces coniques; chacune de ces quartiques rencontre la cinquième conique en deux points; les deux coniques tangentes en ces points à la quartique et circonscrites au triangle se coupent en un quatrième point dont le lieu est une conique circonscrite à ABC.

Les pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques in-

On considère les quartiques (Γ) qui sont circonscrites

scrites dans un quadrilatère décrivent une droite.

à un quadrilatère donné. On mène d'un point fixe, à chacune de ces quartiques les deux coniques circonscrites à ABC et qui lui sont tangentes; les deux points de contact et les sommets A, B, C déterminent une conique. Toutes les coniques ainsi obtenues passent par un quatrième point fixe.

Le théorème de Pascal donne lieu au suivant :

On considère six points $p_1, p_2, \ldots, p_6$ *quelconques sur une quartique* (Γ) *donnée et les six coniques circonscrites à* ABC *et tangentes à* (Γ) *aux six points précédents. Ces coniques sont* $(P_1), (P_2), \ldots, (P_6)$; *les trois coniques circonscrites à* ABC *et passant par les quatrièmes points communs aux coniques*

$$[(P_1), (P_2)][(P_4), (P_5)], \quad [(P_2), (P_3)][(P_5), (P_6)],$$
$$[(P_3), (P_4)][(P_6), (P_1)]$$

se coupent entre elles au même point.

Le théorème de Brianchon conduit au suivant :

On considère six points $p_1, p_2, \ldots, p_6$ *quelconques sur une quartique* (Γ); *les six coniques circonscrites à* ABC *et passant par les points* $(p_1, p_2), (p_2, p_3), \ldots, (p_6, p_1)$, *que nous désignerons par* $(Q_1), (Q_2), \ldots, (Q_6)$, *sont telles que les quatrièmes points communs aux coniques* $[(Q_1), (Q_4)], [(Q_2), (Q_5)], [(Q_3), (Q_6)]$ *sont sur une conique circonscrite à* ABC.

Ces quelques exemples montrent combien il est facile d'effectuer la transformation des propriétés des coniques. Il est inutile de faire remarquer que toutes les propriétés des quartiques unicursales à points doubles

réels donnent par polaires réciproques des propriétés relatives aux quartiques ayant trois tangentes doubles.

I. *Les cordes des contacts avec deux des côtés d'un triangle* ABC *des coniques inscrites dans ce triangle et tangentes à une droite* Δ *fixe passent par un point fixe.*

C'est qu'en effet à l'une des coniques inscrites dans ABC correspondra la corde des contacts qui passera par le point correspondant dans la transformation à la droite Δ.

Si nous supposons que la droite Δ soit la droite de l'infini, le point correspondant est le point A′ d'intersection des parallèles menées de B, C à AB, AC. Nous arrivons donc à cette conclusion : *les cordes des contacts des paraboles,* inscrites dans ABC, avec les côtés AB, AC, passent en A′. Les deux autres cordes des contacts passent par les points B′, C′; par suite :

Les paraboles inscrites dans un triangle admettent toutes un triangle autopolaire commun (A′, B′, C′) *et inversement.*

De sorte que les foyers des paraboles admettant un triangle autopolaire commun décrivent le cercle des neuf points de ce triangle et leurs directrices passent par le centre du cercle circonscrit au triangle donné.

II. *Les cordes de contact avec deux des côtés d'un triangle des coniques inscrites dans ce triangle et passant par un point* P *enveloppent une conique* (P).

Cette conique est évidemment celle qui correspond dans la transformation au point P.

III. *On considère une conique* (P) *circonscrite à un*

triangle ABC, *on joint un point* M *de la conique à deux sommets* B, C : *le point* M′ *de rencontre des droites* BM′, CM′ *conjuguées harmoniques de* BM, CM *par rapport aux médianes* Bb, Cc *et aux droites* BA′, CA′ (b, c *étant les milieux de* AC, AB, *et* A′ *défini comme précédemment*) *décrit une droite.*

Remarquons que cette propriété met en évidence une méthode de transformation qui ferait correspondre une droite à une conique circonscrite au triangle.

Cette proposition n'est que la transformée, par notre méthode, de la proposition suivante :

Étant donné un triangle, une droite se meut en restant parallèle à une direction donnée, l'enveloppe des transversales réciproques de chacune de ces droites par rapport au triangle est la parabole inscrite dans le triangle et dont la direction des diamètres est la direction donnée.

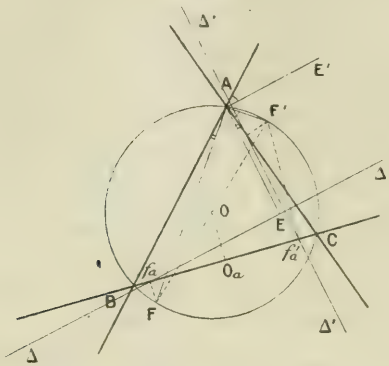
Pour la démontrer géométriquement nous nous appuierons sur la suivante :

Étant données dans un plan deux paraboles, il existe une hyperbole circonscrite au triangle formé par leurs trois tangentes communes et dont les asymptotes sont les tangentes à ces paraboles qui sont parallèles à leurs directions de diamètres.

Considérons, en effet, un triangle ABC, le cercle circonscrit et les paraboles (P), (P′) inscrites dans ABC de foyers F, F′ diamétralement opposés. Les droites de *Simson* de ces points sont Δ, Δ′, deux transversales réciproques par rapport à ABC, puisque Cfa = B$f'a$ (*fig.* 4) (fa, fa' sont les projections de F, F′ sur BC), Oa étant le milieu commun aux segments BC, fa, fa'.

Il existe donc une hyperbole circonscrite à ABC et dont les asymptotes sont Δ, Δ'. Ces droites sont rectangulaires car $\widehat{EAE'} = \widehat{FAF'} = \frac{\pi}{2}$ ($\widehat{EAB} = \widehat{FAC}$, $\widehat{E'AC'} = \widehat{F'AB}$), et AE, AE′ donnent les directions des diamètres de (P),

Fig. 4.



(P′). Δ est donc bien parallèle à la direction des diamètres de (P′) et Δ' parallèle à celles de (P).

Une projection *cylindrique* de cette figure établit la propriété énoncée précédemment.

Mais les asymptotes d'une conique sont, par rapport à un triangle inscrit, deux transversales réciproques ; donc à une tangente Δ à une parabole (P), inscrite dans ABC, correspond une seule parabole (P′) et, par suite, une seule tangente Δ' parallèle à la direction des diamètres de (P) et qui se construira d'après la propriété précédente, en prenant la transversale réciproque de Δ.

Inversement, si une droite Δ' se meut en restant parallèle à une direction fixe, les transversales réciproques de ces droites seront tangentes à la parabole (P) inscrite dans le triangle et dont la direction des diamètres est la direction donnée.

Remarque. — La propriété que nous venons de démontrer conduit, avec une légère remarque, à la *généralisation d'une des questions proposées au Concours d'admission à l'École Polytechnique en* 1889, qui s'énonce ainsi :

Étant données deux droites quelconques Δ, Δ', *on considère les paraboles tangentes à ces droites, dont les foyers décrivent deux droites* δ, δ' *parallèles aux précédentes et dont les directions des diamètres sont parallèles à* Δ, Δ', *les sommets des triangles circonscrits à ces paraboles sont sur l'hyperbole conjuguée de celle qui admet* Δ, Δ' *pour asymptotes et qui passe par le point d'intersection des droites* δ, δ'.

J'énoncerai enfin comme exercice la généralisation d'une question également proposée.

Les conditions précédentes étant remplies et la droite qui joint les foyers des paraboles restant de plus parallèle à une direction donnée, la somme algébrique des angles que font les trois tangentes communes avec une droite fixe est constante.

SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1894;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Je vais indiquer pour quelques lecteurs des *Nouvelles Annales*, comme je l'ai fait depuis plusieurs années, une solution du problème de Mécanique proposé au dernier concours d'Agrégation des Sciences mathématiques. J'en résume l'énoncé.

Une plaque très mince, homogène et pesante, ayant la forme d'un triangle équilatéral $A_1 A_2 A_3$, se meut de telle sorte que le sommet A_1 glisse avec frottement sur un plan horizontal P, tandis que les sommets A_2, A_3 glissent sans frottement sur un plan parallèle Q et qu'une tige verticale OO', fixe et parfaitement polie, est engagée dans une très petite ouverture pratiquée au centre de gravité G de la plaque; le plan Q est mené au-dessus de P à une distance telle que la plaque fasse un angle de 45° avec l'horizon. Cela posé, on imprime à la plaque une rotation ω_0 autour de OO' et l'on demande son mouvement ultérieur ainsi que les réactions verticales N_1, N_2, N_3 exercées sur les points A_1, A_2, A_3. Montrer que, pour une certaine valeur μ de ω_0, N_1 est toujours nul; distinguer le cas où $\omega_0 < \mu$ et le cas de $\omega_0 > \mu$; chercher ce qui arriverait si le sommet A_1 était simplement posé sur le plan P.

Les forces extérieures qui sollicitent la plaque sont : 1° le poids mg; 2° les réactions verticales N_1, N_2, N_3 que je compte positivement dans le sens contraire de la pesanteur; 3° la réaction R de la tige OO', réaction horizontale comme la force de frottement exercée sur le sommet A_1. La vitesse de ce point est parallèle au côté opposé du triangle; je la supposerai toujours dirigée dans le sens $A_3 A_2$; la force de frottement est de sens contraire et égale à fN_1 si, comme je le suppose d'abord, N_1 est positive.

Quand le point A_1 ne quitte pas le plan P, le centre de gravité G est fixe; la réaction R est équipollente à $-fN_1$ et l'on a

$$N_1 + N_2 + N_3 - mg = 0. \tag{1}$$

Nous définirons l'orientation de la plaque au moyen des angles ψ, θ et φ d'Euler. Je considère trois axes rec-

tangulaires de directions constantes Gx_1, Gy_1, Gz_1, ce dernier en sens contraire de la pesanteur, et trois axes liés invariablement à la plaque, Gx suivant la ligne de plus grande pente GA_1, Gy dans la direction de A_3A_2, Gz normal à la plaque et faisant avec Gz_1 un angle aigu. L'angle ψ est l'angle x_1Gy; l'angle θ, égal à 45° quand le point A_1 reste dans le plan P, serait variable dans le cas contraire; φ est, dans tous les cas, égal à 270°. Gx, Gy, Gz sont axes principaux en G, les moments d'inertie correspondants sont A, A, 2A;

$$A = \frac{1}{24} ma^2,$$

a étant le côté du triangle $A_1A_2A_3$. Les coordonnées des trois sommets dans le plan du triangle sont respectivement

$$\frac{a}{\sqrt{3}},\quad 0;\qquad -\frac{a}{2\sqrt{3}},\quad \frac{a}{2};\qquad -\frac{a}{2\sqrt{3}},\quad -\frac{a}{2}.$$

Si l'on remarque enfin que les composantes d'une réaction verticale N_i suivant Gx, Gy, Gz sont $-N_i \sin\theta$, 0, $N_i \cos\theta$, et si l'on désigne par p, q, r les composantes de la rotation instantanée, on aura, pour déterminer le mouvement de la plaque autour du centre de gravité, trois équations de la forme

$$A\frac{dp}{dt} + Aqr = \frac{a}{2}(N_2 - N_3)\cos\theta,$$

$$A\frac{dq}{dt} - Arp = \frac{a}{2\sqrt{3}}(N_2 + N_3 - 2N_1)\cos\theta,$$

$$2A\frac{dr}{dt} = -f\frac{a}{\sqrt{3}}N_1 + \frac{a}{2}(N_2 - N_3)\sin\theta.$$

Lorsque θ doit rester égal à 45°, le mouvement élémentaire de la plaque se réduira toujours à une rotation ω autour de OO′ ou de Gz_1; on aura visible-

ment

$$p = -\frac{\omega}{\sqrt{2}}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{\omega}{\sqrt{2}},$$

et les équations d'Euler deviendront, après de légères réductions,

$$(2) \qquad A\frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{2}(N_3 - N_2),$$

$$(3) \qquad A\omega^2 = \frac{a}{\sqrt{6}}(N_2 + N_3 - 2N_1),$$

$$(4) \qquad A\frac{d\omega}{dt} = -f\frac{aN_1}{\sqrt{6}} + \frac{a}{4}(N_2 - N_3).$$

Des équations (1) et (3) je tire

$$N_1 = \frac{1}{3}\left(mg - \frac{A\sqrt{6}}{a}\omega^2\right), \qquad N_2 + N_3 = \frac{1}{3}\left(2mg + \frac{A\sqrt{6}}{a}\omega^2\right);$$

de même, des équations (2) et (4),

$$N_2 - N_3 = \frac{4f}{3\sqrt{6}}N_1 = \frac{4f}{9\sqrt{6}}\left(mg - \frac{A\sqrt{6}}{a}\omega^2\right),$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2af}{3A\sqrt{6}}N_1 = -\frac{2f}{9}\left(\frac{mga}{A\sqrt{6}} - \omega^2\right).$$

On est conduit à poser

$$(5) \qquad \mu^2 = \frac{mga}{A\sqrt{6}} = \frac{4g\sqrt{6}}{a};$$

$$\frac{2}{9}f = \alpha.$$

Les équations précédentes deviennent

$$(6) \qquad N_1 = \frac{mg}{3}\left(1 - \frac{\omega^2}{\mu^2}\right),$$

$$(7) \qquad \begin{cases} N_2 + N_3 = \dfrac{mg}{3}\left(2 + \dfrac{\omega^2}{\mu^2}\right), \\ N_2 - N_3 = \dfrac{mg\alpha\sqrt{6}}{3}\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\mu^2}\right), \end{cases}$$

$$(8) \qquad \frac{d\omega}{dt} = -\alpha(\mu^2 - \omega^2).$$

L'équation (8) montre que, si ω_0 était égal à μ, ω ne pourrait prendre une valeur différente au bout d'un temps fini quelconque : la plaque tournerait uniformément autour de OO'; les équations (6) et (7) prouvent que N_1 serait égal à zéro, N_2 et N_3 à $\frac{1}{2}mg$.

Il faut se rappeler que, si les équations (1), (2), (3) sont légitimes quel que soit le signe de N_1, l'équation (4), où entre la force de frottement, ne le sera que si N_1 est positif : l'équation (6), qui résulte de (1) et de (3), montre que, pour cela, il faut et il suffit que ω soit $< \mu$. Il en sera ainsi quand $\omega_0 < \mu$, ω ne pouvant que diminuer par suite du frottement; donc, en supposant $\omega_0 < \mu$, les équations (6), (7), (8) sont exactes et je puis intégrer la dernière, ce qui donne

$$\alpha t = \frac{1}{2\mu} \log \frac{(\mu - \omega)(\mu + \omega_0)}{(\mu + \omega)(\mu - \omega_0)},$$

ou, résolvant par rapport à ω,

$$(9) \qquad \omega = \mu \frac{(\mu + \omega_0)e^{-\mu\alpha t} - (\mu - \omega_0)e^{\mu\alpha t}}{(\mu + \omega_0)e^{-\mu\alpha t} + (\mu - \omega_0)e^{\mu\alpha t}}.$$

La vitesse angulaire diminue quand t augmente, ainsi que l'indiquait l'équation (8) : elle s'annule quand on a

$$e^{2\mu\alpha t} = \frac{\mu + \omega_0}{\mu - \omega_0}, \qquad t = \frac{1}{2\mu\alpha} \log \frac{\mu + \omega_0}{\mu - \omega_0} = t_1;$$

à partir de cet instant, il est évident que la plaque va rester immobile, ω étant nulle : on ne devra plus prendre l'équation (9); l'équation (8) elle-même ne sera plus vraie, puisque la force de frottement s'annule, et devra être remplacée par $\frac{d\omega}{dt} = 0$.

L'angle dont la plaque aura tourné s'obtiendra en remplaçant ω par $\frac{d\psi}{dt}$ dans l'équation (9) et intégrant; si

l'on suppose que ψ s'annule avec t, on a

$$\psi = \frac{1}{\alpha} \log \frac{2\mu}{(\mu - \omega_0) e^{-\mu\alpha t} + (\mu - \omega_0) e^{-\mu\alpha t}};$$

pour $t = t_1$,

$$\psi = \frac{1}{\alpha} \log \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}} = \psi_1.$$

On peut exprimer ω et ψ à l'aide de fonctions hyperboliques : si l'on pose

$$\frac{\omega_0}{\mu} = \text{tang hyp } \mu\alpha\tau,$$

ce qui donnera $\tau = t_1$. on trouve

$$\omega = \mu \text{ tang hyp } \mu\alpha(\tau - t), \qquad \psi = \frac{1}{\alpha} \log \frac{\cos \text{hyp } \mu\alpha\tau}{\cos \text{hyp } \mu\alpha(\tau - t)}.$$

Les équations (6) et (7) donnent, en fonction de ω et par suite de t, les valeurs de N_1, N_2, N_3; la discussion en est bien facile. Je remarque seulement que, lorsque t tend vers t_1, N_1 tend vers $\frac{1}{3}mg$, N_2 et N_3 vers $\left(\frac{1}{3} \pm \frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right)mg$; quand la plaque sera devenue immobile, N_1, N_2 et N_3 seront évidemment toutes égales à $\frac{1}{3}mg$; N_2 et N_3 changent brusquement de valeurs quand la plaque s'arrête, aussi bien, d'ailleurs, que $\frac{d\omega}{dt}$.

N_1 restant positive dans le cas considéré, le sommet A_1 appuie toujours sur le plan P et, quand même il pourrait le quitter, il ne le ferait pas et les résultats précédents subsisteraient.

Supposons maintenant $\omega_0 > \mu$: l'équation (6), toujours vraie, prouve que N_1 sera négative tant que ω sera $> \mu$; dans les équations (4) et (8), il faudra changer f en $-f_1$ et, par suite, α en $-\alpha_1$, pour que la force de frottement figure comme dirigée en sens

contraire de la vitesse du point A_1. En mettant en évidence des quantités positives, on remplacera les équations (6), (7), (8) par les suivantes :

$$-N_1 = |N_1| = \frac{mg}{3}\left(\frac{\omega^2}{\mu^2} - 1\right),$$

$$N_2 - N_3 = \frac{mg}{3}\left(2 - \frac{\omega^2}{\mu^2}\right), \qquad N_2 - N_3 = \frac{mg\alpha\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\omega^2}{\mu^2} - 1\right),$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\alpha(\omega^2 - \mu^2).$$

La dernière montre que ω diminue constamment jusqu'à la valeur μ, qu'il atteint au bout d'un temps infini. On en tire d'ailleurs, en intégrant comme dans le premier cas,

$$\omega = \mu\frac{(\omega_0 + \mu)e^{\mu\alpha t} + (\omega_0 - \mu)e^{-\mu\alpha t}}{(\omega_0 + \mu)e^{\mu\alpha t} - (\omega_0 - \mu)e^{-\mu\alpha t}},$$

$$\psi = \frac{1}{\alpha}\log\frac{(\omega_0 + \mu)e^{\mu\alpha t} - (\omega_0 - \mu)e^{-\mu\alpha t}}{2\mu}.$$

Pour introduire des fonctions hyperboliques, il faudra représenter $\frac{\omega_0}{\mu}$, qui est >1, par une cotangente hyperbolique

$$\frac{\omega_0}{\mu} = \cot\operatorname{hyp}\mu\alpha\rho;$$

on trouvera

$$\omega = \mu\cot\operatorname{hyp}\mu\alpha(t + \rho), \qquad \psi = \frac{1}{\alpha}\log\frac{\sin\operatorname{hyp}\mu\alpha(t + \rho)}{\sin\operatorname{hyp}\mu\alpha\rho}.$$

Lorsque t augmentera indéfiniment, on voit que N_1 tendra vers zéro, N_2 et N_3 vers $\frac{1}{2}mg$.

Dans ce second cas, $\omega_0 > \mu$, nous avons trouvé que N_1 est toujours négative, c'est-à-dire que le sommet A_1 tend à s'élever au-dessus du plan P ; s'il est simplement posé sur ce plan, il s'en séparera et le mouvement de la plaque sera bien différent de celui que nous avons étudié ci-dessus. On pourrait le déterminer au moyen

du théorème des forces vives et de celui des aires; mais pour plus d'uniformité, et afin de pouvoir calculer les réactions exercées par le plan Q, je suivrai une marche correspondante à celle qui précède.

Les forces extérieures sont les réactions N_2, N_3 du plan Q, la réaction R de OO′ et le poids mg. Le centre de gravité restant sur OO′, on voit que R est nulle; l'ordonnée ζ de ce centre, par rapport au plan fixe Q, est $-\frac{a\sin\theta}{2\sqrt{3}}$ et l'on a

$$(10)\qquad N_2 + N_3 - mg = m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{ma}{2\sqrt{3}}\left(\theta'^2\sin\theta - \frac{d\theta'}{dt}\cos\theta\right).$$

Le mouvement de la plaque autour de son centre de gravité est encore déterminé par les équations d'Euler que nous avons écrites : il faut toutefois y faire $N_1 = 0$; quant à p, q, r, on les exprime aisément en fonction de θ' et ψ', soit par des considérations géométriques directes, soit à l'aide des formules de Cinématique bien connues, dans lesquelles on fera $\varphi = 270^\circ$; on trouve

$$p = -\psi'\sin\theta, \qquad q = \theta', \qquad r = \psi'\cos\theta.$$

Substituant dans les équations d'Euler et réduisant, on a

$$(11)\qquad -A\sin\theta\frac{d\psi'}{dt} = \frac{a}{2}(N_2 - N_3)\cos\theta,$$

$$(12)\qquad A\frac{d\theta'}{dt} - A\psi'^2\sin\theta\cos\theta = \frac{a}{2\sqrt{3}}(N_2 + N_3)\cos\theta,$$

$$(13)\qquad 2A\left(\cos\theta\frac{d\psi'}{dt} - \psi'\theta'\sin\theta\right) = \frac{a}{2}(N_2 - N_3)\sin\theta.$$

Je remplacerai maintenant A par sa valeur $\frac{ma^2}{24}$ et g par $\frac{\mu^2 a}{4\sqrt{6}}$ (5); alors, les équations (11) et (13) nous

donneront

$$(14)\qquad (1+\cos^2\theta)\frac{d\psi'}{dt}-2\psi'\theta'\sin\theta\cos\theta=0,$$

$$(15)\qquad (1-\cos^2\theta)(N_2-N_3)=-\frac{ma}{6}\theta'\psi'\sin^2\theta.$$

De même, on tire des équations (10) et (12),

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned}&(1+2\cos^2\theta)\frac{d\theta'}{dt}-2\theta'^2\sin\theta\cos\theta\\&\quad=\frac{\mu^2\cos\theta}{\sqrt{2}}-\psi'^2\sin\theta\cos\theta,\end{aligned}\right.$$

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}&(1+2\cos^2\theta)(N_2+N_3)\\&\quad=\frac{ma}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\mu^2}{2\sqrt{2}}+\psi'^2\sin\theta\cos^2\theta+\theta'^2\sin\theta\right).\end{aligned}\right.$$

L'équation (14) s'intègre immédiatement : l'intégrale

$$(1+\cos^2\theta)\psi'=\tfrac{3}{2}\omega_0$$

montre que ψ varie toujours dans le même sens; elle exprime que la somme des moments des quantités de mouvement, par rapport à OO′, est constante. Si, dans l'équation (16), on remplace ψ' par sa valeur et si l'on multiplie tous les termes par $2\theta'$, on peut intégrer, θ' s'annulant pour $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$; après de simples transformations, l'intégrale peut être mise sous la forme

$$\theta'^2=(1-\sqrt{2}\sin\theta)\frac{3\omega_0^2(1+\sqrt{2}\sin\theta)-4\mu^2(2-\sin^2\theta)}{4(1+2\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)};$$

t peut s'exprimer en fonction de θ par une quadrature. Le numérateur de la fraction, qui figure dans la valeur de θ'^2, est positif pour θ égal à 45°, négatif pour $\theta=-45°$; on en conclut aisément que θ oscille entre 45° et une limite comprise entre 45° et $-45°$; cette

limite sera négative, et la plaque pourra devenir horizontale, si ω_0^2 est $> \frac{8}{3}\mu^2$. Dans tous les cas, la plaque a un mouvement périodique, venant toucher le plan P à intervalles fixes.

Les valeurs de N_2, N_3 se détermineront en fonction de θ, au moyen des équations (15) et (17), dans lesquelles on remplacera ψ' et θ' par les valeurs obtenues, il n'y a qu'un instant; les résultats ont une forme compliquée et leur discussion semble offrir peu d'intérêt.

SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE RATIONNELLE DONNÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1895;

PAR M. P. RIGOLLET,
Étudiant, à Nancy.

On considère un corps solide S *pesant, ayant la forme d'un cône droit dont le rayon de base est* R. *Le centre de gravité de ce corps est situé en un point* O *de l'axe de révolution du cône, à une distance* R *de la base.*

L'ellipsoïde d'inertie du corps S *relatif au centre de gravité* O *est une sphère.*

Le cône S *est mobile autour de son centre de gravité* O, *supposé fixe, et la circonférence de sa base est tangente à un plan horizontal fixe* H *situé au-dessous du point* O *à une distance* R *de ce point.*

Étudier le mouvement du corps S *en supposant que la circonférence de base du cône glisse avec frottement sur le plan* H.

Calculer les réactions du plan H *et du point fixe* O.

CONDITIONS INITIALES. — *Soient* OO′ *la perpendiculaire abaissée du point* O *sur le plan* H *et* OC_0 *la*

position initiale de la perpendiculaire abaissée du point O *sur la base du cône; à l'époque* $t = 0$, *l'axe instantané de rotation est situé dans l'angle* $C_0 O O'$, *et le sens de la rotation initiale est choisi de telle sorte que le corps* S *appuie sur le plan* Π.

Choix des axes. — 1° *Axes fixes dans l'espace.* — Considérons (*fig.* 2) le cône dans sa position initiale, le sommet S occupant la position S_0; prenons pour axes *fixes dans l'espace* trois axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, $O\zeta$ étant la verticale vers le haut, $O\xi$ passant par la position C_0 occupée, à cet instant initial $t = 0$, par le point C, centre de la base (B) du cône; $O\eta$ est sur la perpendiculaire au plan $O\xi\zeta$ dans un sens tel, qu'au début du mouvement le point C se meuve de $O\xi$ vers $O\eta$: d'après les données de l'énoncé, le quadrilatère OC_0M_0O', M_0 étant le point de contact de la base avec le plan Π, est un carré ; au début du mouvement, le cône devant appuyer sur Π, le point C décrira dans $O\xi\eta$ un arc de cercle (γ) dans le sens positif d'après le choix de $O\eta$. (Ce choix de $O\eta$ n'est valable qu'autant que le point C ne reste pas toujours dans le plan $O\xi\zeta$, ce qui n'aurait lieu qu'au cas où l'axe instantané serait dirigé suivant OC_0 ou suivant $O\eta$, ce qu'on ne suppose pas d'après l'énoncé.)

Nous appellerons $O'\xi'\eta'\zeta'$ les axes menés par O' parallèlement aux précédents.

2° *Axes fixes dans le corps.* — Prenons pour axe Oz l'axe situé sur l'axe de révolution dans le sens du segment OC ; pour Ox nous prendrons l'axe issu de O, qui est vertical et dirigé vers le bas au début du mouvement; Oy est alors déterminé par ce fait que $Oxyz$ et $O\xi\eta\zeta$ doivent avoir même disposition.

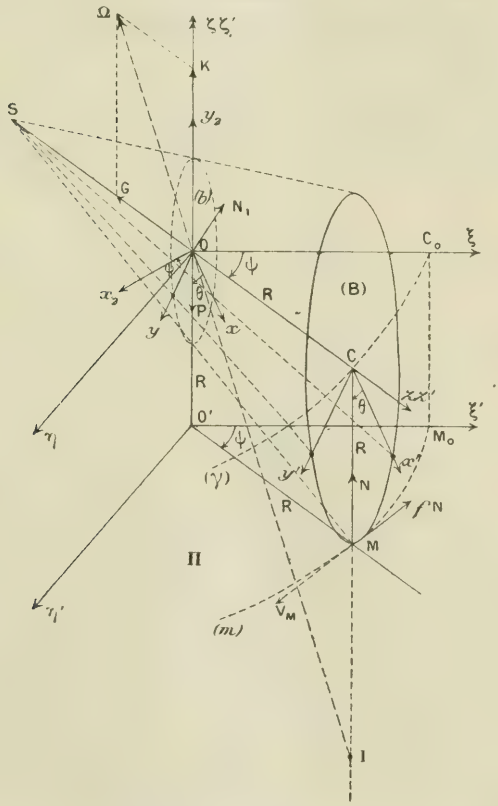
Nous appellerons $Cx'y'z'$ les axes fixes dans le corps menés parallèlement à $Oxyz$ par le point C.

Ces axes $O'\xi'\eta'\zeta'$ et $Cx'y'z'$ sont introduits dans le but de permettre plus facilement des calculs de composantes et de moments de forces.

Première remarque préliminaire. — De $t = 0$ à $t = t$, où ce dernier t est suffisamment petit, le corps restera en contact avec le plan H, puisque au début ce cône appuie sur le plan.

Soit S (*fig.* 1) la position du cône à un instant t suf-

Fig. 1.



fisamment petit pour que le contact ait encore lieu; soit M le point d'appui; les axes $Oxyz$, $Cx'y'z'$ ont

pris des positions différentes de celles qu'ils avaient à $t = 0$; à cet instant t, la position du cône est définie par l'angle ψ de Oz avec $O\xi$, ψ étant compté dans $\xi O\eta$ et par l'angle θ de la verticale CM dirigée vers le bas avec l'axe Ox', cet angle θ étant compté dans $x'Oy'$; θ est aussi figuré dans la section circulaire (b) du cône par le plan Oxy.

Ces angles θ et ψ sont donc nos deux inconnues principales tant qu'il y a contact du cône et du plan Π.

Nos autres inconnues sont les suivantes :

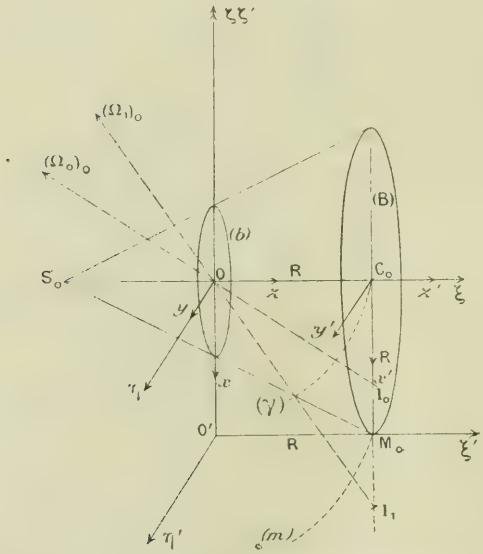
N, réaction de Π sur le cône ;

fN, force de frottement de glissement en M ;

N_1, réaction du point fixe O sur le cône.

Seconde remarque préliminaire. — Au début du

Fig. 2.

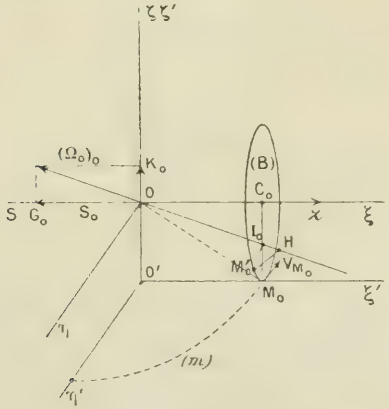


mouvement, l'axe instantané est supposé dans l'angle $\widehat{C_0OO'}$ (*fig.* 2).

Mais ici se présente une petite difficulté : cet axe peut rencontrer C_0M_0 soit en I_0 entre C_0 et M_0, soit en I_1 au-dessous de M_0 ; ce fait a une grande importance au point de vue du sens de la vitesse du point de contact et, par suite, du sens de la force de frottement au départ, comme nous allons le faire voir.

Supposons que l'axe instantané rencontre C_0M_0 en I_0 (*fig.* 3); appelons *plan du tableau* le plan $O\xi\zeta$, $O\eta$ étant supposé en avant de ce plan ; le point C_0 devant venir en avant de ce plan, le segment représentatif de la rota-

Fig. 3.



tion instantanée est $O(\Omega_0)_0$ de sens contraire au segment $\overline{OI_0}$; le *point du cône* qui est en M_0 a donc une vitesse V_{M_0} située en arrière du plan du tableau ; par suite, la force de frottement est parallèle à $O'\eta_1'$ et de même sens. Dans ce cas, le corps appuie sur le plan ; menons par M_0 (*fig.* 3) le plan perpendiculaire à OI_0 ; soit H le pied de OI_0 sur ce plan ; soit M_0' le point qui viendra au contact un temps infiniment petit après M_0 ; on a, dans le cercle (B),

$$I_0M_0' > IM_0,$$

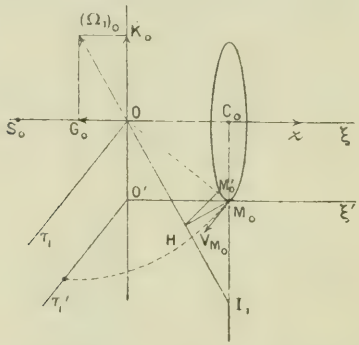
d'où, puisque I_0H est perpendiculaire au plan $HM_0M'_0$,

$$HM'_0 > HM_0 ;$$

le corps tournant autour de OI_0, les points M_0 et M'_0 tournent autour de H ; comme $HM'_0 > HM_0$, c'est que le corps appuie sur le plan Π.

Supposons que l'axe instantané rencontre C_0M_0 en I_1 (*fig.* 4) ; le segment représentatif de la rotation instan-

Fig. 4.



tanée au départ est $O(\Omega_1)_0$ de sens contraire au segment OI_1 ; *le point du cône* qui est en M_0 a une vitesse V_{M_0} parallèle à $O'\tau_1'$ et de même sens ; la force de frottement est en sens contraire ; H étant le pied de OI_1 sur le plan mené par M_0 perpendiculairement à OI_1, et M'_0 étant le point qui viendra au contact après M_0, on a, de même que dans le cas précédent, l'inégalité

$$HM'_0 > HM_0 ;$$

dans ce cas aussi, le corps appuie sur le plan Π.

Dans ces deux hypothèses initiales, le corps appuie donc sur le plan Π ; cependant, un sentiment physique pourrait faire dire avec peu de rigueur qu'il appuie plus dans le deuxième cas que dans le premier.

Troisième remarque préliminaire. — Tant que le corps reste au contact avec le plan H, le point M (*fig.* 1) a une vitesse tangente à la base du cône; il en résulte que l'axe instantané rencontre constamment la base du cône (B) en un point situé sur CM; cet axe est donc dans le plan OCMO'; le segment OΩ mesurant la rotation instantanée se décompose en deux autres

$$\overline{OG} = -\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{et} \qquad \overline{OK} = \frac{d\psi}{dt}.$$

La figure OC_0M_0O' (*fig.* 3 et 4) étant un carré, dans le cas de la *fig.* 3, on a

$$\overline{OG_0} > \overline{OK_0},$$

et dans le cas de la *fig.* 4

$$\overline{OG_0} > \overline{OK_0};$$

si $\overline{O\Omega_0}$ était située sur OM_0, le point du corps qui est en M_0 aurait une vitesse nulle; dans ce cas, ce point ne se déplace pas; dans le cas de la *fig.* 3, la rotation autour de l'axe de révolution du cône étant plus grande que la rotation autour de $O\zeta$, on s'explique pourquoi V_{M_0} est dirigée derrière le plan du tableau; dans le cas de la *fig.* 4, on voit de même pourquoi V_{M_0} est dirigée en avant du plan du tableau.

En résumé, nous avons à étudier deux cas qui correspondent aux conditions initiales données par les *fig.* 3 ou 4.

Nous allons étudier celui de la *fig.* 4; nous connaîtrons celui de la *fig.* 3 en changeant le coefficient de frottement f en $-f$; car, dans les deux cas, les forces de frottement de glissement sont de sens opposés, les vitesses V_{M_0} étant de sens opposés.

Pendant un certain temps, la vitesse du point M sera

dirigée dans le sens des arcs croissants sur (m) et la force de frottement en sens contraire (*fig.* 1).

Nous allons calculer

$$\theta, \quad \psi, \quad N, \quad fN$$

par plusieurs procédés.

Théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à $O\xi\eta\zeta$. — Ce théorème donne les trois équations suivantes où n'entrent ni le poids du corps, ni la réaction du point fixe O, $Ax^2 + Ay^2 + Az^2 = 1$ étant la sphère d'inertie,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(-A\frac{d\theta}{dt}\cos\psi\right) &= \quad RN\sin\psi - fNR\cos\psi,\\
\frac{d}{dt}\left(-A\frac{d\theta}{dt}\sin\psi\right) &= -RN\cos\psi - fNR\sin\psi,\\
\frac{d}{dt}\left(A\frac{d\psi}{dt}\right) &= -RfN
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
-A\theta''\cos\psi + A\theta'\sin\psi\psi' &= \quad RN\sin\psi - fNR\cos\psi,\\
-A\theta''\sin\psi - A\theta'\cos\psi\psi' &= -RN\cos\psi - fNR\sin\psi,\\
A\psi'' &= -RfN;
\end{aligned}$$

en multipliant les deux premières par $\cos\psi$ et $\sin\psi$ et additionnant, puis par $\sin\psi$ et $-\cos\psi$ et additionnant, on obtient le système

$$(e) \qquad \left\{\begin{aligned}
A\theta'' &= \quad fNR,\\
A\theta'\psi' &= \quad NR,\\
A\psi'' &= -fNR.
\end{aligned}\right.$$

Equations d'Euler. — Appliquons les équations d'Euler au système $Oxyz$; on a

$$\begin{aligned}
p &= -\psi'\cos\theta,\\
q &= -\psi'\sin\theta,\\
r &= -\theta'
\end{aligned}$$

obtenues en projetant

$$OG = -\theta', \qquad OK = \psi'$$

sur Ox, Oy, Oz,

$$\begin{aligned}
-A\psi''\cos\theta + A\psi'\sin\theta\theta' &= \quad NR\sin\theta - fNR\cos\theta,\\
-A\psi''\sin\theta - A\psi'\cos\theta\theta' &= -NR\cos\theta - fNR\sin\theta,\\
-A\theta'' \qquad\qquad\qquad &= -RfN;
\end{aligned}$$

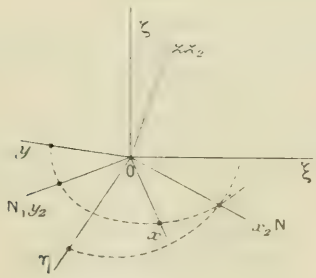
en multipliant la première par $\cos\theta$ et la deuxième par $\sin\theta$, puis additionnant, en multipliant ensuite la première par $+\sin\theta$ et la deuxième par $-\cos\theta$ et additionnant, on a

$$\begin{aligned}
-A\psi'' &= fNR,\\
A\psi'\theta' &= \quad NR,\\
A\theta'' &= fNR
\end{aligned}$$

qui sont les équations (e).

Equations de M. Resal. — Considérons un système d'axes fixes $O\xi\eta\zeta$ et un système mobile $Oxyz$; les axes

Fig. 5.



de M. Resal (gyroscope) sont les axes $Ox_2y_2z_2$, Ox_2 étant la ligne des nœuds ON dans un sens déterminé, Oy_2 la ligne ON_1 faisant avec Ox_2 l'angle $+\frac{\pi}{2}$ compté dans le sens défini par Oxy; soient p_2, q_2, r_2 les quantités analogues aux p, q, r d'Euler et définissant sur $Ox_2y_2z_2$

le mouvement de CE trièdre PAR RAPPORT A $O\xi\eta\zeta$, de même que, dans les équations d'Euler, p, q, r définissent sur $Oxyz$ le mouvement de ce trièdre $Oxyz$ par rapport à $O\xi\eta\zeta$; M. Resal a établi *de même qu'on fait, pour trouver les équations d'Euler*, les équations suivantes dites *équations de M. Resal :*

$$A\frac{dp_2}{dt} - q_2(Ar_2 - Cr) = L_2,$$

$$A\frac{dq_2}{dt} + p_2(Ar_2 - Cr) = M_2,$$

$$C\frac{dr}{dt} = N,$$

qui ne sont valables que pour un corps de révolution autour de Oz; la troisième est la troisième équation d'Euler; cherchons ici nos *axes de M. Resal;* la ligne des nœuds (*fig.* 1) est la ligne d'intersection de Oxy avec $O\xi\eta$; prenons pour Ox_2 la direction qui fait l'angle ψ avec $O\eta$; Oy_2 se trouve être $O\zeta$ et Oz_2 est confondu avec Oz; on a

$$p_2 = 0,$$

$$q_2 = \frac{d\psi}{dt},$$

$$r_2 = 0,$$

$$r = -\frac{d\theta}{dt};$$

on a alors

$$-\psi'(A\theta') = -NR,$$

$$A\psi'' = -fNR,$$

$$+A\theta'' = fNR,$$

qui sont encore les équations (e).

Intégration des équations (e). — Ces équations sont

$$(e) \qquad \left\{ \begin{aligned} A\theta'' &= fNR, \\ A\theta'\psi' &= NR, \\ A\psi'' &= -fNR: \end{aligned} \right.$$

la première et la troisième donnent par addition

$$\theta'' + \psi'' = 0,$$

d'où

$$\theta' + \psi' = \alpha,$$

et

$$\theta - \psi = \alpha t + \alpha',$$

α et α' étant deux constantes; on a (*fig.* 1), à l'instant $t = 0$,

$$\theta'_0 - \psi'_0 = |OG_0| + |OK_0| = \alpha.$$

qui donne α, et

$$0 + 0 = \alpha . 0 + \alpha',$$

d'où

$$\alpha' = 0;$$

on a donc

$$\theta'' - \psi'' = 0,$$

$$\theta' + \psi'' = \alpha,$$

$$\theta + \psi = \alpha t;$$

l'équation

$$\theta' + \psi' = \alpha$$

donne

$$\theta' = \alpha - \psi',$$

qui, avec la deuxième équation (e), donne

$$A\psi'(\alpha - \psi') = NR;$$

divisons la dernière équation (e) par celle-ci; nous avons l'équation différentielle

$$(d) \qquad \frac{\psi''}{\psi'(\alpha - \psi')} = -f,$$

qui donne ψ en fonction du temps; elle ne contient ni A, ni R, ce qui montre que le problème ne dépend ni de la densité du corps, ni du rayon R, comme on pouvait s'y attendre après une première réflexion, en remarquant que le centre de gravité est précisément le point fixe.

Intégrons (d); on peut l'écrire

$$\frac{d\psi'}{\psi'(\alpha-\psi')} = -f.dt,$$

ou, en multipliant les deux membres par α et séparant le premier en fractions simples,

$$\frac{d\psi'}{\psi'} + \frac{d\psi'}{\alpha-\psi'} = -f\alpha\, dt,$$

d'où

$$\text{Log}\,\psi' - \text{Log}(\alpha-\psi') + f\alpha t = \beta, \qquad \text{où } \beta \text{ est une constante,}$$

ou

$$\text{Log}\frac{\psi'}{\alpha-\psi'} = \beta - f\alpha t,$$

équation qui permet de déterminer β; on a

$$\beta = \text{Log}\frac{\psi'_0}{\alpha-\psi'_0}$$

pour $t=0$; ψ'_0 est positif d'après le choix des axes; on a

$$\alpha - \psi'_0 = \theta'_0,$$

d'où

$$\beta = \text{Log}\frac{\psi'_0}{\theta'_0},$$

θ'_0 étant aussi positif, car

$$\overline{OG_0} = -\theta'_0 < 0$$

(*fig.* 4); dans le cas de la *fig.* 4, on a

$$\frac{\psi'_0}{\theta'_0} = \frac{\overline{OK_0}}{-\overline{OG_0}} > 1,$$

et, par suite,

$$\beta > 0;$$

on a enfin ψ' par

$$\frac{\psi'}{\alpha-\psi'} = e^{\beta - f\alpha t},$$

d'où

$$(g) \qquad \psi' = \frac{\alpha e^{\beta - f\alpha t}}{1 + e^{\beta - f\alpha t}},$$

qui s'intègre par une quadrature; écrivons

$$d\psi = \frac{\alpha e^{\beta - f\alpha t}}{1 + e^{\beta - f\alpha t}} dt = -\frac{1}{f} \frac{-f\alpha e^{\beta - f\alpha t}}{1 + e^{\beta - f\alpha t}} dt.$$

d'où

$$(h) \qquad \psi = -\frac{1}{f} \operatorname{Log}(1 + e^{\beta - f\alpha t}) + \gamma$$

(γ *constante arbitraire*). γ se détermine en faisant $t = 0$; on a

$$0 = -\frac{1}{f} \operatorname{Log}(1 + e^{\beta}) + \gamma = -\frac{1}{f} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{\psi'_0}{\theta'_0}\right) + \gamma,$$

car

$$\beta = \operatorname{Log} \frac{\psi'_0}{\theta'_0};$$

d'où

$$\gamma = \frac{1}{f} \operatorname{Log} \frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\theta'_0},$$

d'où

$$\psi = -\frac{1}{f} \operatorname{Log}(1 + e^{\beta - f\alpha t}) + \frac{1}{f} \operatorname{Log} \frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\theta'_0},$$

qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{f} \operatorname{Log} \frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\theta'_0} \frac{1}{1 + e^{\beta - f\alpha t}} \\ &= \frac{1}{f} \operatorname{Log} \frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\theta'_0} \frac{1}{1 + \frac{\psi'_0}{\theta'_0} e^{-f\alpha t}} \\ &= \frac{1}{f} \operatorname{Log} \frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\psi'_0 e^{-f\alpha t} + \theta'_0}; \end{aligned}$$

si, au lieu de faire porter le calcul sur ψ, on l'avait fait porter sur θ, en remplaçant ψ' par $\alpha - \theta'$ au lieu de remplacer θ' par $\alpha - \psi'$, on aurait trouvé

$$\theta = -\frac{1}{f} \operatorname{Log} \frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\psi'_0 + \theta'_0 e^{f\alpha t}};$$

on trouve donc les deux formules

$$(i)\quad \begin{cases} \psi = \dfrac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{\psi'_0 + \theta'_0}{\psi'_0\, e^{-f\alpha t} + \theta'_0}, \\[2ex] \theta = -\dfrac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{\psi'_0 + \theta'_0}{\psi'_0 + \theta'_0\, e^{f\alpha t}}, \end{cases}$$

où

$$\alpha = \psi'_0 + \theta'_0,$$

ψ'_0 et θ'_0 étant, je le répète, deux nombres positifs, valeurs absolues des grandeurs des segments $\overline{OK_0}$ et $\overline{OG_0}$ à l'instant $t = 0$; si l'on ajoute membre à membre ces deux équations, on doit retrouver

$$\theta + \psi = \alpha t;$$

on a, en effet,

$$\begin{aligned} \theta + \psi &= \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\psi'_0\, e^{-f\alpha t} + \theta'_0}\;\frac{\psi'_0 + \theta'_0\, e^{f\alpha t}}{\psi'_0 + \theta'_0} \\ &= \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0 + \theta'_0\, e^{f\alpha t}}{\psi'_0 + \theta'_0\, e^{f\alpha t}}\, e^{f\alpha t} \\ &= \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\, e^{f\alpha t} = \frac{1}{f} f\alpha t = \alpha t. \end{aligned}$$

Ces deux formules montrent que quand t croît à partir de $t = 0$, ψ et θ augmentent; dans ψ le Log est positif, tandis qu'il est négatif dans θ.

La formule (g) qui donne ψ' et l'analogue pour θ', qui peuvent s'écrire

$$(k)\quad \begin{cases} \psi' = \dfrac{\alpha}{e^{f\alpha t - \beta} + 1}, \\[2ex] \theta' = \dfrac{\alpha}{e^{-f\alpha t + \beta} + 1}, \end{cases}$$

montrent que ψ' et θ' sont positifs; on voit que ψ' décroît avec t, tandis que θ' croît; du reste, $\theta' + \psi'$ est égal à une constante α; ainsi donc, en valeur absolue (*fig.* 1), $\overline{OG}$ croît et $\overline{OK}$ décroît; le point I se rapproche donc de M d'un mouvement continu. Au moment où I sera

en M, la vitesse de M sera nulle et par suite il n'y aura plus de frottement; à ce moment, on aura

$$\overline{OK} = -\overline{OG},$$

ou

$$\psi' = \theta';$$

du reste, si l'on cherche la vitesse du point du corps qui est en M, on a

$$V_M = R\psi' - R\theta' = R(\psi' - \theta');$$

elle s'annule pour

$$\psi' = \theta';$$

comme on a

$$\psi' + \theta' = \alpha,$$

la vitesse de M s'annulera pour

$$\psi' = \theta' = \frac{\alpha}{2};$$

l'instant T correspondant est donné par $\psi' = \frac{\alpha}{2}$ ou $\theta' = \frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire, en prenant $\psi' = \frac{\alpha}{2}$, par

$$\frac{\alpha e^{\beta - f\alpha T}}{1 + e^{\beta - f\alpha T}} = \frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$2e^{\beta - f\alpha T} = 1 + e^{\beta - f\alpha T},$$

d'où

$$e^{\beta - f\alpha T} = 1,$$

d'où

$$\beta - f\alpha T = 0,$$

ou

$$T = \frac{\beta}{f\alpha}.$$

A partir de ce moment, nous allons chercher si la vitesse du point du corps qui est en M_1 reste constam-

ment nulle ; en cet instant, on a

$$\theta_T = -\frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\psi'_0 + \theta'_0 e^{\beta}} = -\frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0 + \theta'_0}{2\psi'_0}$$

et

$$\psi_T = \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\psi'_0 e^{\beta} + \theta'_0} = \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\theta'_0 + \psi'_0}{2\theta'_0}.$$

Auparavant, remarquons que le problème résultant des conditions initiales données par la *fig.* 3 serait absolument le même que le précédent, à cette différence près que la vitesse du point de contact serait en sens contraire et, par suite, aussi la force de frottement ; on déduira donc les résultats relatifs à la *fig.* 3 de ceux que nous venons de trouver pour la *fig.* 4, en changeant f en $-f$; comme $\frac{\psi'_0}{\theta'_0} < 1$ dans ce nouveau cas,

$$\beta = \mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0}{\theta'_0}$$

est négatif, et pour le temps T où la vitesse du point du corps qui est au contact devient nulle, donné par

$$T = \frac{\beta}{f\alpha},$$

on a encore au deuxième membre une quantité positive, car $\alpha = \psi'_0 + \theta'_0 > 0$, puisqu'on a $\psi'_0 > 0$ et $\theta'_0 > 0$, d'après le choix des axes.

Nous avons donc ainsi, par un même calcul, traité les deux cas des *fig.* 3 et 4 ; dans ces deux cas, le point de rencontre de l'axe instantané avec la verticale MC du point de contact se rapproche constamment de ce point de contact.

Le cas intermédiaire serait celui où l'on aurait $\psi'_0 = \theta'_0$; au début l'axe instantané serait $\overline{OM_0}$; la vitesse du point de contact serait nulle : on serait, dès le

début du mouvement, dans le cas qui se présente à l'instant T ; c'est un cas limite des deux précédents ; ainsi prenons, dans le calcul fait pour ces deux cas, la valeur de T ; si $\psi'_0 = \theta'_0$, on a

$$\beta = \operatorname{Log} 1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad T = 0.$$

Etude du mouvement à partir du temps T. — Il est clair qu'à partir du temps T le point du cône qui est au contact avec le plan H aura une vitesse nulle ; supposons, en effet, que cette vitesse cesse d'être nulle ; il naît alors une force de frottement qui, si petite qu'elle soit, d'après l'étude des cas relatifs aux *fig.* 3 et 4, tend à rendre nulle la vitesse du point du cône qui est au contact.

Nous nous trouvons donc, à partir du temps T, en face d'un nouveau problème dans lequel la base du cône roule sans glisser sur le plan ; au début de ce nouveau mouvement, on a

$$\psi'_T = \theta'_T = \frac{\alpha}{2} = \frac{\psi'_0 + \theta'_0}{2}.$$

Les équations de ce nouveau problème peuvent se déduire de celles du précédent en faisant $f = 0$, car il n'y a plus de frottement de glissement (le frottement de roulement est négligé) ; les équations (e) deviennent

$$(m) \qquad \begin{cases} A\psi'\theta' = NR, \\ A\psi'' = 0, \\ A\theta'' = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\theta = \theta'_T . t + \theta_T \qquad \text{et} \qquad \psi = \psi'_T . t + \psi_T,$$

avec

$$\theta' = \theta'_T = \frac{\theta'_0 - \psi'_0}{2}, \qquad \psi' = \psi'_T = \frac{\theta'_0 + \psi'_0}{2};$$

rappelons qu'on a trouvé

$$\theta_T = -\frac{1}{f}\log\frac{\psi'_0+\theta'_0}{2\psi'_0}, \qquad \psi_T = +\frac{1}{f}\log\frac{\theta'_0+\psi'_0}{2\theta'_0},$$

formules valables pour le cas (4); pour (3) on change f en $-f$.

A partir de T donc, le cône roule jusqu'à $t=\infty$ d'un mouvement uniforme, puisque ψ' et θ' sont constants; ceci s'explique par ce fait qu'on a négligé le frottement de roulement et qu'aucune force ne produit du travail; pour $t=\infty$, θ et ψ sont infinis.

Calcul des réactions. — 1° *Réaction* N. — Avant le temps T, N est donnée par exemple par la deuxième équation (e); on a

$$N = \frac{A\theta'\psi'}{R} = \frac{A}{R}\cdot\frac{\alpha.e^{\beta-f\alpha t}}{1+e^{\beta-f\alpha t}}\cdot\frac{\alpha.e^{-\beta+f\alpha t}}{1+e^{-\beta+f\alpha t}} = \frac{\alpha^2 e^{-\beta+f\alpha t}}{(1+e^{-\beta+f\alpha t})^2}\frac{A}{R};$$

à l'instant T, elle a pour valeur

$$N_T = \frac{\alpha^2 1}{(1+1)^2}\cdot\frac{A}{R} = \frac{A\alpha^2}{R\,4} = \left(\frac{\theta'_0+\psi'_0}{2}\right)^2\frac{A}{R} = \frac{A}{R}(\theta'_T)^2 = (\psi'_T)^2\frac{A}{R}.$$

A partir de T, N est donnée par la même formule $N = \frac{A\psi'\theta'}{R}$, d'après les équations (m); on a donc, à partir de T,

$$N' = \frac{A}{R}\frac{\alpha^2}{4} = \frac{A}{R}\left(\frac{\theta'_0+\psi'_0}{2}\right)^2 = \frac{A}{R}\cdot\theta'^2_T = \frac{A}{R}\cdot\psi'^2_T;$$

N′ a ainsi plusieurs expressions.

2° *Réaction* N_1. — Appliquons le théorème du mouvement du centre de gravité : ce centre O est fixe; on a donc (*fig.* 1), avant T, a, b, c étant les cosinus directeurs de N_1,

$$\begin{cases} 0 = fN\sin\psi + N_1\cos a, \\ 0 = -fN\cos\psi + N_1\cos b, \\ 0 = + N_1\cos c - P + N, \end{cases}$$

qui donnent N_1, a, b, c en utilisant

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Après T, on a

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = N_1 \cos a, \\ 0 = N_1 \cos b, \\ 0 = N_1 \cos c - P + N'. \end{array}\right.$$

d'où

$$a = \frac{\pi}{2}, \qquad b = \frac{\pi}{2}, \qquad c = 0;$$

on a

$$N_1 = P - N' = P - \frac{A}{R}\left(\frac{\theta'_0 + \psi'_0}{2}\right)^2;$$

cette réaction, qui a une valeur constante, est dirigée verticalement vers le haut si $P > N'$, vers le bas si $P < N'$, comme le montre la troisième formule : elle est nulle si $P = N'$.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE;

PAR M. R. S.

On considère le complexe formé par les cordes d'un hyperboloïde à une nappe vues du centre sous un angle droit.

Cônes du complexe qui sont de révolution.

Courbes du complexe qui sont des paraboles ou des cercles.

L'étude analytique ne présente pas de difficultés; pour l'étude géométrique, nous nous appuierons sur les deux propositions suivantes :

LEMME I. — *L'enveloppe des cordes d'une conique.*

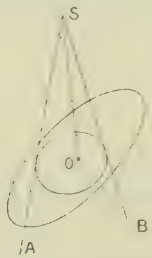
vues du centre sous un angle droit, est un cercle concentrique.

Si la conique est une hyperbole équilatère, l'enveloppe se réduit aux deux points I et J.

Lemme II. — *L'enveloppe des plans coupant le cône* C *suivant deux droites rectangulaires est un cône du second degré* ζ ayant mêmes plans principaux.

§ I. — Cône du complexe.

Mode de génération. — Soit S le sommet du cône, O le centre de l'hyperboloïde H; si je considère un plan quelconque par SO, la courbe du complexe dans ce plan est le cercle O (Lemme I), et les génératrices du cône S situées dans ce plan sont les tangentes menées de S à ce cercle. On peut engendrer tout le cône en faisant tourner le plan autour de SO, la droite SO ne fait pas partie du complexe, et les droites SA et SB



sont constamment symétriques par rapport à SO; donc :

1° *Le complexe est du second ordre;*

2° *La droite* SO *est un axe du cône du complexe.*

Plans cycliques. — SO étant un axe, il y a deux plans cycliques passant par SO. Soit P l'un d'eux; il faut que les deux droites SA et SB correspondantes

soient isotropes. S n'étant pas centre du cercle O, il faut donc que ce cercle se réduise aux deux points I et J. Il faut donc que la conique d'intersection de H par P soit une hyperbole équilatère (Lemme I). Mais alors P coupe le cône C suivant deux droites rectangulaires : il est tangent au cône φ (Lemme II).

On obtient les plans cycliques passant par SO *en menant par* SO *les plans tangents au cône* φ.

Cônes du complexe qui sont de révolution. — Les conclusions relatives aux plans cycliques sont alors de deux natures différentes :

1° SO n'est pas l'axe de révolution. Alors les deux plans cycliques par SO sont confondus, ce qui arrivera seulement quand SO sera une génératrice du cône φ.

Un premier lieu de sommets des cônes du complexe qui sont de révolution est le cône φ.

2° SO est l'axe de révolution. Les deux plans cycliques P et Q, passant par SO, passent alors par les points I et J du plan R perpendiculaire à SO, et ils sont tangents au cône φ. Considérons, d'autre part, le point sphère ou cône isotrope S; pour avoir les plans tangents à ce point sphère passant par SO, il faut considérer la polaire conjuguée de SO : c'est la droite de l'∞ du plan R, intersection des plans polaires de deux points de SO. Ces plans tangents sont donc définis par la droite SO et par les points I et J du plan R; ils coïncident avec les plans P et Q. Le plan P est tangent au cône φ suivant une génératrice G; il est tangent au cône isotrope S suivant une génératrice G'. Au point d'intersection de G et G', φ et S sont tangents. Donc le point sphère S est bitangent au cône φ.

Un second lieu de sommets des cônes du complexe

qui sont de révolution se compose des focales du cône φ : ce sont six droites dont deux sont réelles.

II. — Courbe du complexe.

Nous avons vu antérieurement que le complexe était du second ordre. *Donc la courbe du complexe est de seconde classe :* c'est une conique.

Courbes du complexe qui sont des paraboles. — Ce sont des coniques tangentes à la droite de l'∞. La droite de l'∞ du plan doit être vue du centre sous un angle droit : la conique d'intersection doit être une hyperbole équilatère (Lemme I).

Les plans pour lesquels la courbe du complexe est une parabole sont les plans tangents au cône φ *et tous les plans parallèles.*

Courbes du complexe qui sont des cercles. — *Les plans pour lesquels la courbe du complexe est une circonférence sont d'abord tous les plans par l'origine* (Lemme I).

En second lieu, soit P un plan tel que la courbe du complexe soit une circonférence. Une circonférence est une conique par les points I et J, telle, par conséquent, que les tangentes issues d'un de ces points soient confondues.

Cela posé, soit P ce plan, I un des points cycliques de ce plan. On obtiendra les tangentes issues de I à la courbe du complexe en prenant l'intersection de P avec le cône du complexe de sommet I. Pour que la courbe du complexe soit un cercle, il faut et il suffit que le plan P soit tangent aux deux cônes I et J. Les deux cônes I et J, qui n'ont pas même sommet, ni même base

et ne sont pas homothétiques, admettent un plan tangent commun ; donc ils sont de révolution et circonscrits à une même sphère.

Or le lieu des sommets des cônes de révolution est le cône φ. Le cercle de l'x rencontre le cône φ en deux couples de points IJ, I'J'. Les deux cônes IJ sont de révolution et imaginaires conjugués : une sphère inscrite à l'une est évidemment inscrite à l'autre. Donc on peut leur mener un plan tangent commun P passant par la droite des sommets IJ.

Les plans tels que la courbe du complexe soit une circonférence sont donc les plans cycliques du cône φ et tous les plans parallèles.

SUR LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT;

PAR M. V. JAMET,
Professeur au lycée de Marseille.

Depuis que la notion d'intégrale définie fait partie du cours de Mathématiques spéciales, personne, que je sache, dans ce journal, n'a songé à s'en servir pour répondre à une question qui excite souvent la curiosité des bons élèves, sans qu'il soit possible de leur donner, en réponse, une de ces démonstrations qui s'imposent à l'esprit par la simplicité du calcul et la clarté de la méthode. Cette question, qui m'a été posée dans la classe préparatoire aux Mathématiques spéciales, est celle-ci : « *Pourquoi toute équation algébrique a-t-elle une racine?* » Si l'on veut traiter la question en étudiant la variation que subit l'argument

du premier membre de l'équation, lorsque la variable imaginaire dont il dépend décrit un contour fermé, la difficulté consiste à faire voir que cette variation est toujours la même lorsque ce contour se déforme d'une manière continue, sans jamais passer par un point représentant une racine de l'équation donnée. C'est surtout cette difficulté que je veux résoudre à ma manière, renvoyant le lecteur, pour la fin de la démonstration, à l'*Algèbre* de Briot, annotée par M. Lacour (*voir* à la fin du Volume).

Soit $f(z)$ un polynome entier, à coefficients réels ou imaginaires. Remplaçons-y z par $x + y\sqrt{-1}$, et mettons le polynome sous la forme $X + Y\sqrt{-1}$, X et Y représentant deux polynomes entiers en x et y, à coefficients réels. Supposons que la variable z décrive un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon a, de telle sorte qu'à chaque position du point mobile représenté par cette variable réponde un arc t, ayant, avec x et y, les relations $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. L'argument du polynome dépend de a et de t, mais lorsque la variable z aura décrit la circonférence en entier, le sinus et le cosinus de cet argument, savoir

$$\frac{Y}{\sqrt{X^2 - Y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{X}{\sqrt{X^2 - Y^2}},$$

auront repris leurs valeurs initiales, et l'argument n'aura pu varier que d'un multiple de 2π. Je considère un autre cercle de rayon $a + \Delta a$, compris, comme le premier, dans une couronne circulaire ayant pour centre l'origine et ne comprenant aucun point racine de l'équation $f(z) = 0$. Je dis que la variation de l'argument de ce polynome, relative à ce nouveau cercle, ne diffère pas de la variation relative au premier. En effet, soit $\omega(a, t)$ l'arc dont le cosinus et

le sinus sont égaux, pour chaque valeur de t, à $\frac{X}{\sqrt{X^2 - Y^2}}$ et à $\frac{Y}{\sqrt{X^2 - Y^2}}$. La variation considérée le long du premier cercle est égale à

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega(a, t)}{dt}\, dt,$$

et le long du deuxième cercle, à

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega(a - \Delta a, t)}{dt}\, dt.$$

Entre ces deux variations, la différence est égale à

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} \left[\frac{d\omega(a - \Delta a, t)}{dt} - \frac{d\omega(a, t)}{dt} \right] dt.$$

et si sa valeur numérique est inférieure à 2π, elle est rigoureusement nulle. Mais, à chaque valeur de t, répond une longueur a', comprise entre a et $a - \Delta a$, et telle que la fonction sous le signe $\int$ peut être remplacée par

$$\Delta a \frac{\partial^2 \omega(a', t)}{\partial t\, \partial a}.$$

En effet, ω étant un des arcs dont la tangente est $\frac{Y}{X}$, on trouve

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{XY' - YX'}{X^2 - Y^2}.$$

En vertu de nos hypothèses, c'est là une fonction de a qui ne cesse pas d'être finie lorsque ce paramètre varie entre les rayons des deux cercles considérés; et il en est de même de sa dérivée par rapport à a, savoir

$$(2) \qquad \frac{(X^2 - Y^2)\left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial t\, \partial a} - Y \frac{\partial^2 X}{\partial t\, \partial a}\right) - 2\left(X \frac{\partial X}{\partial a} - Y \frac{\partial X}{\partial a}\right)(XY' - YX')}{(X^2 - Y^2)^2}.$$

En outre, l'expression (2) montre que, dans toute l'étendue de la couronne, la fonction $\frac{\partial^2 \omega}{\partial a \partial t}$ reste inférieure à un nombre constant M, et par conséquent l'intégrale (1) est numériquement inférieure à

$$\Delta a \times M \times 2\pi.$$

Si donc Δa est inférieur ou égal à $\frac{1}{M}$, le théorème est démontré. Dans le cas contraire, traçons p cercles, par exemple, concentriques aux premiers, et dont les rayons soient $a + \frac{1}{M}$, $a + \frac{2}{M}$, ..., $a + \frac{p}{M}$ avec la condition $\Delta a - \frac{p}{M} \leq \frac{1}{M}$.

Soient V_0 et V les valeurs de l'intégrale (1) relatives aux deux cercles donnés, V_1, V_2, V_3, ..., V_p les valeurs relatives aux cercles intermédiaires. De l'identité

$$V - V_0 = (V - V_p) + (V_p - V_{p-1}) + \ldots + (V_1 - V_0)$$

on déduit $V - V_0 = 0$, puisque chacune des différences écrites au second membre est nulle. Le théorème est donc démontré.

Il reste à faire voir que la variation, relative à un cercle ayant pour centre l'origine, est nulle, si le rayon de ce cercle est plus petit que le module de toute racine de l'équation $f(z) = 0$. Or, si l'on fait $x = 0$ et $y = 0$, l'un au moins des polynomes X, Y, par exemple X, prend une valeur A différente de zéro. Soit

$$X = A + ax + by + cx^2 + dxy + cy^2 + \ldots$$

et soient aussi K le nombre des termes ax, by, cx^2, ..., M un nombre supérieur au module de tout coefficient $a, b, c, \ldots$. On peut trouver un nombre α, tel que, si les valeurs numériques de x et de y ne dépassent pas α, chacun des termes variables du second membre de l'éga-

lité précédente ne dépasse pas $M\alpha$ (numériquement), et, si l'on suppose $\alpha < \frac{|A'|}{KM}$, on est assuré que si la variable z décrit un cercle ayant l'origine pour centre et dont le rayon est égal ou inférieur à α, le polynome X ne s'annule jamais. Dès lors, l'argument du polynome $f(z)$ ne peut varier qu'entre deux multiples consécutifs impairs de $\frac{\pi}{2}$, puisque son cosinus ne change pas de signe; donc sa variation totale, étant moindre que π, est rigoureusement nulle.

Si le polynome X était nul à l'origine, on ferait appel au polynome Y et l'on montrerait que l'argument du polynome varie entre deux multiples consécutifs de π.

Enfin, si le rayon du cercle donné est supérieur à α, on lui appliquera le théorème précédent, en le renfermant dans une couronne limitée d'une part par le cercle de rayon α, et d'autre part, par un autre cercle de rayon supérieur au rayon du cercle donné, mais inférieur au module de toute racine de l'équation $f(z) = 0$.

Pour conclure, nous démontrerons qu'il est possible de trouver une longueur R assez grande pour que, la variable z décrivant un cercle de rayon R ayant l'origine pour centre, l'argument du polynome varie d'une quantité différente de zéro, de telle sorte que ce cercle renferme au moins un point racine de l'équation obtenue en égalant ce polynome à zéro.

Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_1 z^2 + \ldots + a_m z^m$$

le polynome donné. Posant $z = \frac{1}{z'}$, nous trouvons

$$f(z) = \frac{a_0 z'^m + a_1 z'^{m-1} + \ldots + a_m}{z'^m}$$

et, si la variable z décrit un cercle ayant l'origine pour

centre et R pour rayon, z' décrira, en sens inverse, un cercle ayant l'origine pour centre et pour rayon $\frac{1}{R}$. Mais, si $\frac{1}{R}$ est inférieur au module de toute racine de l'équation

$$a_0 z'^m + a_1 z'^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

la variation de l'argument du quotient écrit ci-dessus se réduira à la variation, changée de signe, de l'argument du diviseur, savoir $2m\pi$.

Il est inutile de montrer ici comment l'expression de cette variation dénote la présence de m racines, puisque la démonstration en a été donnée par les auteurs cités au début de cet Article.

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ROMUALD BLAZEIEVSKI.

Les inconnues $y_i = \frac{1 - x_i}{D}$ satisfont à l'équation

$$(1) \quad s^3 - \frac{1}{D} s^2 + \frac{C(kD^2 - 1)}{D^4} s - \frac{C}{D^5}(kD^2 - lD^3 - 1) = 0.$$

Rappelons-nous l'équation

$$hD - 5 = \frac{y - 1}{z - q} z - \frac{y^2 z}{q(y - 1)}.$$

Cette équation peut être représentée sous une autre forme à l'aide des relations

$$z = \frac{1}{D\sqrt{k}} - \frac{1}{kD^3\sqrt{k}}, \qquad q = \frac{l}{k^{\frac{3}{2}}}, \qquad y - 1 = C\left(k - \frac{1}{D^2}\right);$$

nous avons

$$(2)\quad hD - 5 = \frac{C(kD^2-1)^2}{D^2(kD^2-1-lD^3)} - \frac{[D^2+C(kD^2-1)]^2}{lCD^5}.$$

Les y_i ont une expression algébrique

$$y_1 = \frac{1}{2}\frac{t_1}{u_1}, \qquad y_2 = \frac{1}{2}\frac{t_2}{u_2}, \qquad y_3 = \frac{1}{2}\frac{t_3}{u_3},$$

$$t_1 = \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}, \qquad t_2 = \sqrt{\gamma} - \sqrt{\alpha}, \qquad t_3 = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta},$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{\beta}}{m_2} - \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3}, \qquad \ldots.$$

Ainsi, si l'on désigne $A = u_1 u_2 u_3$, $B = \Sigma u_1 u_2 t_3$, $G = \Sigma u_1 t_2 t_3$, $D' = t_1 t_2 t_3$, on a

$$8As^3 - 4Bs^2 - 2Gs - D' = 0,$$

Appelons

$$U = \Sigma m_1 (m_2 - m_3)\sqrt{\alpha},$$
$$V = \Sigma (m_2 - m_3)\sqrt{\alpha},$$
$$W = \Sigma \frac{m_2 - m_3}{m_1}\sqrt{\alpha}.$$

on aura

$$(3)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{l}(W - DV), & B = -\frac{1}{l}(DU + V), \\ G = \left(D - \frac{k}{l}\right)W - \frac{2}{l}U, & D' = \left(D - \frac{k}{l}\right)V. \end{cases}$$

En effet, les termes tels que $\sqrt{\alpha\beta}$, $\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ disparaissent dans A, B, G, D'. Prenons par exemple G, nous avons de $u_1 t_2 t_3$ le terme $\frac{1}{m_2}\sqrt{\beta\gamma\alpha}$, mais $t_1 t_2 u_3$ donne ce même terme $-\frac{1}{m_2}\sqrt{\beta\gamma\alpha}$ avec le signe opposé; cherchons le facteur qui multiplie $\sqrt{\alpha}$, dans $u_1 t_2 t_3$; on a $u_1(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})\sqrt{\alpha}$; le seul terme dépendant de $\sqrt{\alpha}$, dans $t_1 u_2 t_3$; on trouve $t_1\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} + \frac{\sqrt{\beta}}{m_1}\right)\sqrt{\alpha}$; enfin $t_1\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{m_1} + \frac{\sqrt{\beta}}{m_2}\right)\sqrt{\alpha}$

dans $t_1 t_2 u_3$. Ainsi

$$G = \left[u_1(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}) + t_1 \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} + \frac{\sqrt{\beta}}{m_2} + \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}{m_1} \right) \right] \sqrt{\alpha} + \ldots.$$

ou bien faisant la multiplication et substituant $m_1(D-a)$, $m_2(D-b)$, $m_3(D-c)$ aux symboles α, β, γ

$$G = 2c - 2b + \frac{m_2(D-b) - m_3(D-c)}{m_1}$$

$$= 2\left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3}\right) + \frac{m_2 - m_3}{m_1} D - \frac{m_2 - m_3}{m_1^2} - \frac{1}{m_1}\left(\frac{m_2}{m_3} - \frac{m_3}{m_2}\right),$$

$$G = (m_2 - m_3)\left(\frac{D}{m_1} - \frac{k}{l m_1} - \frac{2}{m_2 m_3}\right)\sqrt{\alpha}$$

$$= \left(D - \frac{k}{l}\right) \Sigma \frac{m_2 - m_3}{m_1} \sqrt{\alpha} - \frac{2}{l} \Sigma m_1(m_2 - m_3)\sqrt{\alpha}.$$

Une grande simplicité dans les formules apparaît si l'on pose $lD^3 = (kD^2 - 1)x$: on a

$$C = \frac{(lD - k)D^3}{4(kD^2 - 1) - 8lD^3} = \frac{(lD - k)D^3}{4(kD^2 - 1)(1 - 2x)},$$

$$\frac{4C(kD^2 - 1)}{D^3} = \frac{lD - k}{1 - 2x},$$

$$\frac{8C(kD^2 - 1 - lD^3)}{D^3} = \frac{2(lD - k)(1 - x)}{D(1 - 2x)}.$$

Les équations (1) et (2) deviennent

$$(1') \quad s^3 - \frac{1}{D} s^2 + 4 \frac{lD - k}{1 - 2x} s - \frac{2(lD - k)(1 - x)}{D(1 - 2x)} = 0,$$

$$(2') \quad hD - 5 = -\frac{1}{4} \frac{D^2(lD - k)}{x(1 - x)} - \frac{2}{x} - \frac{4(1 - 2x)}{x(lD - k)D^2}.$$

D'après (3) nous avons

$$(3') \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{lD}(W - DV) &= -\frac{1}{l}(DU + V), \\ \frac{(lD - k)(W - DV)}{l(1 - 2x)} &= \frac{(lD - k)W - 2U}{l}, \\ \frac{2(lD - k)(1 - x)}{lD(1 - 2x)}(W - DV) &= \frac{(lD - k)V}{l}. \end{aligned} \right.$$

Séparant la solution $lD - k = 0$ qui exige des valeurs spéciales pour les données du problème, nous aurons

$$(4')\quad \begin{cases} D^2U - DV + 2W = 0, \\ (lD - k)DV - 2x(lD - k)W - 2(1-2x)U = 0, \\ (3-4x)DV - 2(1-x)W. \end{cases}$$

Mais les rapports égaux donnent

$$\frac{DV}{2(1-x)} = \frac{W}{3-4x} = \frac{DV - 2W}{2(3x-2)} = \frac{D^2U}{2(3x-2)}.$$

Ainsi, comme les équations (4) sont homogènes, on leur satisfera, substituant aux U, V, W les valeurs proportionnelles

$$D^2(lD-k)\left[3-4x - \frac{3-4x-2(1-x)}{(1-2x)}\right] = 4(3x-2)$$

ou bien

$$(5)\qquad D^2(lD-k)(1-2x) - 2(3x-2) = 0,$$

par la transformation à l'aide de $lD^3 = (kD^2 - 1)x$,

$$(1-2x)[(kD^2-1)x - kD^2] - 2(3x-2) = 0,$$

$$(x-1)(2x-1)kD^2 = 2x^2 - 7x + 4,$$

$$(6)\qquad kD^2 = \frac{2x^2-7x+4}{(x-1)(2x-1)},$$

$$(5')\quad \begin{cases} (lD-k)(1-2x)\dfrac{2x^2-7x+4}{(x-1)(2x-1)} = 2k(3x-2), \\ (lD-k)(2x^2-7x+4) = 2k(2-3x); \end{cases}$$

enfin, séparant le terme en D,

$$(7)\qquad (2x^2-7x+4)lD = 4x(3-4x)k.$$

Nous ne pousserons pas plus loin l'élimination de l'inconnue D. Évidemment, les équations contenant k et l ne satisfont pas à la question générale, car k, l peuvent varier séparément de h. L'équation finale sera, au plus, du degré six en x.

Éliminant kD^2 et D au moyen de (6), (7), nous aurons

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{hk}{l(2x^2-7x+4)}-5 \\ &= \frac{3x-2}{2x(1-x)(2x-1)} - \frac{2}{x} + \frac{2(2x-1)^2}{x(2-3x)}. \end{aligned}\right.$$

En effet, un calcul un peu laborieux, mais facile, donne cette formule. En chassant les dénominateurs, on a successivement

$$\frac{hk}{l(2x^2-7x+4)} = \frac{(3x-2)2(2-3x)-(2-5x)2(1-x)(2x-1)(2-3x)+2^2(1-x)(2x-1)^3}{2x(1-x)(2-3x)(2x-1)(2-3x)},$$

l'équation sera au plus du degré six.

Ainsi, en adjoignant les solutions singulières, résultant des équations (6) et (7),

$$l^2(2x^2-7x-4)^3 = k^3x^2(4x-3)^2(x-1)(2x-1)$$

et la solution

$$lD-k=0,$$

nous avons la certitude que, procédant d'une manière ordinaire à la recherche de l'équation en D, nous aurions une équation du douzième degré.

BIBLIOGRAPHIE.

La librairie Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins, vient de publier un nouveau Volume de la Collection des *Actualités scientifiques*, intitulé **Les limites actuelles de notre Science**, discours du marquis DE SALISBURY, premier ministre d'Angleterre. Cette adresse présidentielle a été prononcée à l'inauguration des séances de l'Association Britan-

nique, dans la session d'Oxford. Elle a été traduite en français, *avec l'autorisation de l'Auteur*, par M. W. DE FONVIELLE, qui l'a accompagnée d'une Préface et de Notes destinées, tant à en faire comprendre l'importance qu'à mettre le public au courant de l'état des Sciences de l'autre côté du détroit. Prix : 1fr,50.

DÉMONSTRATION ALGÉBRIQUE D'UN THÉORÈME RELATIF A L'INTERSECTION DE DEUX COURBES;

PAR M. E. AMIGUES.

Si un même point est d'ordre p dans une courbe d'ordre m et d'ordre q dans une autre courbe d'ordre n, ces deux courbes se coupent au plus en $(mn - pq)$ autres points.

Prenons ce point pour origine. Les équations des deux courbes sont

$$\varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + \varphi_p(x, y) = 0,$$
$$\psi_n(x, y) + \psi_{n-1}(x, y) + \ldots + \psi_q(x, y) = 0.$$

Posons

$$y = tx.$$

A chaque solution (x, y) correspond une solution (x, t), et à chaque solution (x, t) correspond une solution (x, y).

Étudions donc les solutions (x, t), qui sont données par les équations

$$x^m \varphi_m(1, t) + x^{m-1} \varphi_{m-1}(1, t) + \ldots + x^p \varphi_p(1, t) = 0,$$
$$x^n \psi_n(1, t) + x^{n-1} \psi_{n-1}(1, t) + \ldots + x^q \psi_q(1, t) = 0.$$

Supprimons les solutions composées d'un x nul et d'un t arbitraire, qui donneraient un y nul et par suite

l'origine. Les équations deviennent

$$x^{m-p}\varphi_m(1, t) + x^{m-p-1}\varphi_{m-1}(1, t) + \ldots + \varphi_p(1, t) = 0,$$
$$x^{n-q}\psi_n(1, t) + x^{n-q-1}\psi_{n-1}(1, t) + \ldots + \psi_q(1, t) = 0.$$

Il n'y a plus qu'à compter les solutions de ce système.

Pour cela nous allons éliminer x et prouver que l'équation en t est au plus de degré $mn - pq$.

Représentons les équations comme il suit :

$$a_0 x^{m-p} + a_1 x^{m-p-1} + \ldots + a_i x^{m-p-i} + \ldots + a_{m-p} \equiv 0,$$
$$b_0 x^{n-q} + b_1 x^{n-q-1} + \ldots + b_j x^{n-q-j} + \ldots + b_{n-q} \equiv 0.$$

Le résultant est de la forme

$$\Sigma M a_i^\lambda a_j^\mu b_k^\nu b_l^\rho$$

avec la condition

$$\lambda i + \mu j + \nu k + \rho l = (m-p)(n-q),$$

a_i est un polynome en t qui est au plus de degré $m - i$ et a_i^λ est au plus de degré $\lambda(m - i)$. De même b_k^ν est au plus de degré $\nu(n - k)$.

Donc le résultant est un polynome en t de degré au plus égal à

$$\lambda(m-i) + \mu(m-j) + \nu(n-k) + \rho(n-l),$$

c'est-à-dire à

$$m(\lambda + \mu) + n(\nu + \rho) - (m-p)(n-q);$$

mais on a aussi, par les propriétés du résultant,

$$\lambda + \mu \leq n - q,$$
$$\nu + \rho \leq m - p.$$

Donc le degré du résultant est au plus

$$m(n-q) + n(m-p) - (m-p)(n-q),$$

c'est-à-dire

$$mn - pq.$$

FORMULES DE LA STATIQUE D'UN CORPS SOLIDE, EN AXES OBLIQUES;

PAR M. ÉTIENNE POMEY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Je me propose, dans cette Note d'établir les principales formules de la statique d'un corps solide invariable, par rapport à des axes Ox, Oy, Oz faisant entre eux les angles $yOz = \lambda$, $zOx = \mu$, $xOy = \nu$.

I. — MOMENT D'UN VECTEUR.

Je me propose de calculer les composantes A, B, C suivant les axes du moment G d'un vecteur AF par rapport à l'origine, les coordonnées du point A étant x, y, z, les composantes de AF suivant les axes étant X, Y, Z.

Première méthode. — Soient A_1, B_1, C_1 les projections orthogonales de G sur les axes. Puisque G est la somme géométrique de A, B, C, en projetant orthogonalement sur les axes, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} A + B\cos\nu + C\cos\mu = A_1, \\ A\cos\nu + B + C\cos\lambda = B_1, \\ A\cos\mu + B\cos\lambda + C = C_1. \end{cases}$$

Or, A_1, B_1, C_1 sont les moments de AF par rapport aux axes. Je vais calculer C_1, en considérant le trièdre des coordonnées comme direct, et en regardant C_1 comme positif ou négatif, selon que le trièdre O. AFz est direct

ou inverse. Cela étant, on sait que, si l'on prend sur Oz un segment positif OP égal à l'unité, la valeur algébrique de C_1 est le sextuple du volume du tétraèdre O. AFP, ce volume étant lui-même regardé comme positif ou négatif, selon que le trièdre O. AFP est direct ou inverse.

Or, en appelant V le volume d'un tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$, considéré comme positif ou négatif selon que le trièdre $M_1 . M_2M_3M_4$ est direct ou inverse, x_i, y_i, z_i les coordonnées du sommet M_i, ω le sinus du trièdre $Oxyz$, on a

$$V = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\sqrt{\omega}.$$

En appliquant cette formule au tétraèdre OAFP, on a

$$C_1 = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x+X & y+Y & z+Z & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\sqrt{\omega}$$

ou

$$(2) \qquad C_1 = (xY - yX)\sqrt{\omega}.$$

Posons, conformément à l'usage,

$$(3) \quad L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX.$$

On en déduit

$$(4) \qquad A_1 = L\sqrt{\omega}. \qquad B_1 = M\sqrt{\omega}, \qquad C_1 = N\sqrt{\omega}.$$

Portant ces valeurs dans les équations (1) et résolvant

celles-ci par rapport à A, B, C, on a finalement

$$(5)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\begin{vmatrix} L & \cos\nu & \cos\mu \\ M & 1 & \cos\lambda \\ N & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\omega}}, \\[2ex] B = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & L & \cos\mu \\ \cos\nu & M & \cos\lambda \\ \cos\mu & N & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\omega}}, \\[2ex] C = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & L \\ \cos\nu & 1 & M \\ \cos\mu & \cos\lambda & N \end{vmatrix}}{\sqrt{\omega}}. \end{cases}$$

Remarque. — Ayant A, B, C, il est facile d'obtenir G et ses angles α, β, γ avec les axes. En effet, en multipliant géométriquement G par la relation $\overline{G} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$, on a

$$(6)\qquad G^2 = \overline{A}\,\overline{G} + \overline{B}\,\overline{G} + \overline{C}\,\overline{G} = AA_1 + BB_1 + CC_1.$$

En éliminant A, B, C entre les équations (1) et l'équation (6) et tenant compte des équations (4), on a

$$(7)\qquad G^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & L \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & M \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & N \\ L & M & N & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut observer que cette valeur de G^2 peut s'écrire

$$(8)\qquad G^2 = lL + mM + nN,$$

en appelant l, m, n les numérateurs des valeurs de A, B, C. Enfin on a α, β, γ par les formules

$$(9)\quad \begin{cases} G\cos\alpha = A + B\cos\nu + C\cos\mu, \\ G\cos\beta = A\cos\nu + B + C\cos\lambda, \\ G\cos\gamma = A\cos\mu + B\cos\lambda + C. \end{cases}$$

Deuxième méthode. — Pour obtenir C_1, on peut prendre le trièdre $Ox_1y_1z_1$ supplémentaire du trièdre $Oxyz$, et projeter parallèlement à Oz sur le plan Ox_1y_1 le double du triangle OAF, ou, ce qui revient au même, le double du triangle Oaf obtenu en projetant OAF sur le plan xOy parallèlement à Oz. Or, les points a et f ayant pour coordonnées x, y et $x + X$, $y + Y$, on a

$$2 \text{ surf. } Oaf = (xY - yX) \sin \nu$$

et par suite

$$C_1 = (xY - yX) \sin \nu \cos (Oz, Oz_1).$$

Mais on sait que les angles φ, χ, ψ d'une direction avec les axes satisfont à l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu & \cos \varphi \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda & \cos \chi \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & \cos \psi \\ \cos \varphi & \cos \chi & \cos \psi & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En appliquant cette formule à la direction Oz_1, pour laquelle on a $\varphi = \chi = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu & 0 \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda & 0 \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & \cos (Oz, Oz_1) \\ 0 & 0 & \cos (Oz, Oz_1) & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

d'où

$$\sin \nu \cos (Oz, Oz_1) = \pm \sqrt{\omega},$$

et, par suite,

$$C_1 = \pm (xY - yX) . \sqrt{\omega}.$$

Or, si l'on suppose AF parallèle à Oy dans le sens positif, A étant sur Ox, y est nul, x et y sont positifs, et C_1 est positif. Il faut donc prendre au second membre

le signe $+$. On retombe ainsi sur la formule (2) et par suite sur tous les résultats de la première méthode.

Troisième méthode. — Sur la demi-droite Ox_1, perpendiculaire au plan yOz du même côté que Ox prenons un vecteur OH égal à H et multiplions géométriquement par H la relation

$$\overline{G} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C},$$

on obtient

$$\overline{G}.\overline{H} = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})\,\overline{H} = \overline{A}\,\overline{H} = AH\cos(Ox, Ox_1),$$

puisque H est perpendiculaire à B et C. Or, on a

$$(10) \qquad \overline{G}\,\overline{H} = GH\cos(G, H), \qquad G = 2\,\text{surf}\,OAF,$$

ou, puisque OG est perpendiculaire à OAF et que par suite, $H\cos(G, H)$ est la hauteur h du tétraèdre ayant pour base OAF et pour sommet H,

$$\overline{G}\,\overline{H} = 2\,\text{surf.}\,OAF.\,h = 6\,\text{vol.}\,OAFH.$$

d'où, en appelant a, b, c les coordonnées de H,

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{G}\,\overline{H} &= -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x+X & y+Y & z+Z \\ a & b & c \end{vmatrix} \sqrt{\omega} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ a & b & c \end{vmatrix} \sqrt{\omega} \\ &= -(aL + bM + cN)\sqrt{\omega}. \end{aligned} \right.$$

Or, la relation $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{H}$ donne, par projection orthogonale sur les trois axes,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &a + b\cos\nu + c\cos\mu = H\cos(Ox, Ox_1), \\ &a\cos\nu + b + c\cos\lambda = 0, \\ &a\cos\mu + b\cos\lambda + c = 0. \end{aligned} \right.$$

En éliminant a, b, c, $\overline{G}.\overline{H}$ entre les relations (10),

(11), (12) on obtient la première des formules (5). On retrouve donc encore les résultats obtenus ci-dessus.

Quatrième méthode. — Le vecteur OG, moment du vecteur AF, est perpendiculaire à OA et AF; il a pour longueur le double de la surface du triangle OAF, enfin le trièdre O.AFG est direct. Les trois premières conditions s'expriment par

$$\overline{G}.\overline{OA} = 0, \qquad \overline{G}.\overline{AF} = 0, \qquad G = OA.AF \sin(OA, AF),$$

la dernière pouvant être remplacée par

$$\overline{G}^2 = \overline{OA}^2.\overline{AF}^2 - (\overline{OA}.\overline{AF})^2.$$

Or on a les équations géométriques

$$\overline{G} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}, \qquad \overline{OA} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}, \qquad \overline{AF} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}.$$

Les trois équations précédentes deviennent donc

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}) = 0, \\ &(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}) = 0, \\ &G^2 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})^2(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})^2 \\ &\qquad - [(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})]^2. \end{aligned} \right.$$

Pour abréger les écritures, je pose

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= x + y\cos\nu + z\cos\mu, & U &= X + Y\cos\nu + Z\cos\mu, \\ v &= x\cos\nu + y + z\cos\lambda, & V &= X\cos\nu + Y + Z\cos\lambda, \\ w &= x\cos\mu + y\cos\lambda + z, & W &= X\cos\mu + Y\cos\lambda + Z. \end{aligned} \right.$$

Alors, en observant que l'on a

$$\begin{aligned} &(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}) \\ &\quad = Ux + Vy + Wz = uX + vY + wX, \end{aligned}$$

les équations (13) peuvent s'écrire

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &Au + Bv + Cw = 0, \qquad AU + BV + CW = 0, \\ &G^2 = (ux + vy - wz)(UX + VY + WZ) \\ &\qquad - (Ux + Vy + Wz)(uZ + vY + wZ). \end{aligned} \right.$$

En posant, conformément à des notations déjà employées dans la première méthode,

$$(16)\qquad l = vW - wV, \qquad m = wU - uW, \qquad n = uV - vU,$$

$$(17)\qquad L = yZ - zY, \qquad M = zZ - xZ, \qquad N = xY - yX,$$

les équations (15) peuvent se mettre sous la forme

$$(18)\qquad \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n},$$

$$(19)\qquad G^2 = lL + mM + nN.$$

Or, si l'on pose encore

$$\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu$$

et $\varepsilon = \pm 1$, on déduit des équations (18)

$$(20)\qquad \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = \varepsilon\sqrt{\frac{\sigma(A, B, C)}{\sigma(l, m, n)}}.$$

Mais on a

$$(21)\qquad \sigma(A, B, C) = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})^2 = G^2$$

et

$$\begin{aligned}\sigma(l, m, n) = {} & l(l + m\cos\nu + n\cos\mu)\\ & + m(l\cos\nu + m + n\cos\lambda)\\ & + n(l\cos\mu + m\cos\lambda + n),\end{aligned}$$

ou, d'après les formules (16),

$$\sigma(l, m, n) = \begin{vmatrix} l + m\cos\nu + n\cos\mu & l\cos\nu + m + n\cos\lambda & l\cos\mu + m\cos\lambda + n \\ u & v & w \\ U & V & W \end{vmatrix}$$

ou encore, d'après les formules (14),

$$\sigma(l, m, n) = \begin{vmatrix} l + m\cos\nu + n\cos\mu & l\cos\nu + m + n\cos\lambda & l\cos\mu + m\cos\lambda + n \\ x + y\cos\nu + n\cos\mu & x\cos\nu + y + z\cos\lambda & x\cos\mu + y\cos\lambda + z \\ X + Y\cos\nu + Z\cos\mu & X\cos\nu + Y + Z\cos\lambda & X\cos\mu + Y\cos\lambda + Z \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\sigma(l, m, n) = \begin{vmatrix} l & m & n \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

ou enfin, d'après les formules (17) et (19),

$$\sigma(l, m, n) = G^2\omega. \tag{22}$$

Alors, d'après (21) et (22), les relations (20) deviennent

$$A = \varepsilon\frac{l}{\sqrt{\omega}}, \qquad B = \varepsilon\frac{m}{\sqrt{\omega}}, \qquad C = \varepsilon\frac{m}{\sqrt{\omega}}. \tag{23}$$

Enfin, le trièdre O.AFG devant être direct, le déterminant des coordonnées des points A, F, G doit être positif. Or ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x+X & y+Y & z+Z \\ A & C & C \end{vmatrix}$$

ou, d'après les équations (23) et (19), $\frac{\varepsilon G^2}{\sqrt{\omega}}$.

On a donc $\varepsilon = +1$, et finalement les formules (23) se réduisent aux formules (5), comme dans les méthodes précédentes.

Cinquième méthode. — En appelant (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les cosinus directeurs de Ox, Oy, Oz relativement à trois axes rectangulaires Ox', Oy', Oz' de même origine, les formules pour passer du système $Ox'y'z'$ au système $Oxyz$ sont

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \\ y' &= \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \\ z' &= \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

avec les conditions

$$(25)\qquad \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1, \\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1, \end{cases}$$

$$(26)\qquad \begin{cases} \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=\cos\lambda, \\ \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=\cos\mu, \\ \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=\cos\nu. \end{cases}$$

D'après les formule (24), les composantes A′, B′, C′ de G suivant Ox', Oy', Oz' sont liées à A, B, C par les formules

$$\begin{aligned} A'&=\alpha A+\alpha' B+\alpha'' C, \\ B'&=\beta A+\beta' B+\beta'' C, \\ C'&=\gamma A+\gamma' B+\gamma'' C. \end{aligned}$$

On en tire

$$(27)\qquad A\times\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A' & \alpha' & \alpha'' \\ B' & \beta' & \beta'' \\ C' & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Or, d'après les formules (25) et (26), on voit qu'on a

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}=\omega.$$

D'autre part, dans le système rectangulaire O$x'y'z'$, on a

$$A'=y'Z'-z'Y',\qquad B'=z'X'-x'Z',\qquad C'=x'Y'-y'X'.$$

Il en résulte, d'après les formules (24) appliquées à x', y', z', X′, Y′, Z′, x, y, z, X, Y, Z,

$$A'=\begin{vmatrix} \beta x+\beta' y+\beta'' z & \beta X+\beta' Y+\beta'' Z \\ \gamma x+\gamma' y+\gamma'' z & \gamma X+\gamma' Y+\gamma'' Z \end{vmatrix},$$

$$B'=\ldots,\qquad C'=\ldots$$

ou

$$(29)\quad \begin{cases} A' = (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')L + (\gamma\beta'' - \beta\gamma'')M + (\beta\gamma' - \gamma\beta')N, \\ B' = (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')L + (\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')M + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')N, \\ C' = (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')L + (\beta\alpha'' - \alpha\beta'')M + (\alpha\beta' - \beta\alpha')N. \end{cases}$$

Donc, en vertu de (28) et (29), la formule (27), ordonnée par rapport à L, M, N devient, en posant $\varepsilon = \pm 1$,

$$\begin{aligned} A\varepsilon\sqrt{\omega} = L[&(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')^2 + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2] \\ &+ M[(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')(\gamma\beta'' - \beta\gamma'') + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') \\ &\qquad + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')(\beta\alpha'' - \alpha\beta'')] \\ &+ N[(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')(\beta\gamma' - \gamma\beta') + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') \\ &\qquad + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')(\alpha\beta' - \beta\alpha')]. \end{aligned}$$

Le coefficient de L est $\sin^2\lambda$. Le coefficient de M peut s'écrire

$$\begin{aligned} &(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')(\alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma) \\ &\quad - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après les équations (25) et (26),

$$\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu.$$

Le coefficient de N est de même

$$\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu.$$

On en conclut finalement, après avoir déterminé ε par un cas particulier,

$$A\sqrt{\omega} = l, \qquad B\sqrt{\omega} = m, \qquad C\sqrt{\omega} = n,$$

comme précédemment.

II. — Réduction des forces.

On sait qu'un système quelconque de forces F_i appliquées en des points M_i d'un corps solide peut toujours être remplacé par une résultante de translation R appliquée en un point arbitraire O du solide et par un couple G. Nous prenons le point O pour origine des axes Ox, Oy, Oz, dont les angles sont λ, μ, ν; nous

supposons M_i donné par ses coordonnées x_i, y_i, z_i et F_i donnée par ses composantes X_i, Y_i, Z_i suivant les axes.

Résultante de translation. — Soient X, Y, Z ses composantes suivant les axes. On sait qu'on a

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_i} + \ldots.$$

Il en résulte, en projetant sur chaque axe parallèlement au plan des deux autres, les relations

$$(30) \qquad X = \Sigma X_i, \qquad Y = \Sigma Y_i, \qquad Z = \Sigma Z_i.$$

Axe G *du couple résultant.* — Soient A, B, C ses composantes suivant les axes. Si l'on appelle G_i l'axe du couple résultant du transport de F_i en O, on sait qu'on a

$$\overline{G} = \overline{G_1} + \overline{G_2} + \ldots + \overline{G_i} + \ldots.$$

D'autre part, on sait que l'axe G_i est le moment de F_i par rapport à O ; donc, en appelant A_i, B_i, C_i ses composantes suivant les axes, et projetant la relation précédente sur chaque axe parallèlement au plan des deux autres, on a

$$(31) \qquad A = \Sigma A_i, \qquad B = \Sigma B_i, \qquad C = \Sigma C_i.$$

Je pose

$$L_i = y_i Z_i - z_i Y_i, \qquad M_i = z_i X_i - x_i Z_i, \qquad N_i = x_i Y_i - y_i X_i;$$

$$l_i = \begin{vmatrix} L_i & \cos\nu & \cos\mu \\ M_i & 1 & \cos\lambda \\ N_i & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

$$m_i = \begin{vmatrix} 1 & L_i & \cos\mu \\ \cos\nu & M_i & \cos\lambda \\ \cos\mu & N_i & 1 \end{vmatrix},$$

$$n_i = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & L_i \\ \cos\nu & 1 & M_i \\ \cos\mu & \cos\lambda & N_i \end{vmatrix},$$

$$\Sigma L_i = L, \qquad \Sigma M_i = M, \qquad \Sigma N_i = N.$$

Alors, d'après les formules (5) appliquées aux forces F_i, les formules (31) deviennent

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} A\sqrt{\omega} &= \begin{vmatrix} L & \cos\nu & \cos\lambda \\ M & 1 & \cos\lambda \\ N & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}, \\ B\sqrt{\omega} &= \begin{vmatrix} 1 & L & \cos\mu \\ \cos\nu & M & \cos\lambda \\ \cos\mu & N & 1 \end{vmatrix}, \\ C\sqrt{\omega} &= \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & L \\ \cos\nu & 1 & M \\ \cos\mu & \cos\lambda & N \end{vmatrix}, \end{aligned}\right.$$

Conditions d'équilibre. — On sait que les conditions d'équilibre sont $R = 0$, $G = 0$. Ces conditions exigent qu'on ait

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

Les trois premières s'écrivent, en fonction des données,

$$\Sigma X_i = 0, \qquad \Sigma Y_i = 0, \qquad \Sigma Z_i = 0.$$

Les trois dernières qui, d'après les formules (32), s'écrivent

$$\begin{vmatrix} L & \cos\nu & \cos\mu \\ M & 1 & \cos\lambda \\ N & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & L & \cos\mu \\ \cos\nu & M & \cos\lambda \\ \cos\mu & N & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & L \\ \cos\nu & 1 & M \\ \cos\mu & \cos\lambda & N \end{vmatrix} = 0,$$

sont des équations linéaires et homogènes en L, M, N

dont le déterminant étant l'adjoint de ω est différent de zéro, comme égal à ω^2. Ces équations se réduisent donc à

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

Conditions de réductibilité à un couple. — On sait qu'il faut et il suffit que R soit nul, G ne l'étant pas, ce qui donne les conditions

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad L^2 + M^2 + N^2 > 0.$$

Conditions de réductibilité à une force unique. — On sait qu'il faut et il suffit que R soit différent de zéro et que G soit perpendiculaire à R. Ces conditions reviennent à

$$(33) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 > 0 \quad \text{et} \quad \overline{R}\,\overline{G} = 0.$$

Or, les équations géométriques

$$\overline{R} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}, \qquad \overline{G} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

donnent

$$\begin{aligned}\overline{R}\,\overline{G} &= (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})\overline{X} + (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})\overline{Y} + (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})\overline{Z} \\ &= (A + B\cos\nu + C\cos\mu)X + (A\cos\nu + B + C\cos\lambda)Y \\ &\qquad + (A\cos\mu + B\cos\lambda + C)Z\end{aligned}$$

ou, d'après les formules (32),

$$\overline{R}\,\overline{G} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}(L\omega X + M\omega Y + N\omega Z) = (LX + MY + NZ)\sqrt{\omega}.$$

La condition $\overline{R}\,\overline{G} = 0$ revient donc à

$$(34) \qquad LX + MY + NZ = 0.$$

Enfin, en supposant remplies les conditions précédentes (33) et (34), il reste à déterminer la force

unique F équivalente au système. En appelant x, y, z les coordonnées de son point d'application, X′, Y′, Z′ ses composantes suivant les axes, A′, B′, C′ les composantes de l'axe du couple résultant du transport de cette force à l'origine, on a

$$X' = X, \qquad Y' = Y, \qquad Z' = Z,$$
$$A' = A, \qquad B' = B, \qquad C' = C.$$

Ce sont les équations d'équilibre du système donné et de la force égale et directement opposée à F. Donc, en posant

$$L' = yZ' - zY', \qquad M' = zX' - xZ', \qquad N' = xY' - yX',$$

les équations précédentes se réduisent, d'après le paragraphe relatif aux conditions d'équilibre, aux suivantes :

$$X' = X, \qquad Y' = Y, \qquad Z' = Z,$$
$$L' = L, \qquad M' = M, \qquad N' = N.$$

Les trois premières donnent les composantes de la force F suivant les axes. En portant les valeurs de ces composantes dans les trois dernières équations, celles-ci deviennent

$$yZ - zY = L,$$
$$zX - xZ = M,$$
$$xY - yX = N.$$

Elles sont compatibles en x, y, z, à cause de la relation (34) qui est supposée satisfaite, et elles donnent le point d'application de F, ou, mieux encore, elles peuvent être regardées comme représentant la droite suivant laquelle agit F.

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE [1];

PAR M. E.-N. BARISIEN.

Les formules démontrées à l'Article précité permettent de résoudre très simplement la question suivante, qu'il ne serait pas aisé de trouver directement :

Aire de la podaire de la seconde développée de la $m^{ième}$ podaire d'une courbe. — En conservant les notations de l'Article précédent, soit toujours

$$r = f(\theta)$$

l'équation de la courbe fondamentale.

Si γ est le centre de courbure relatif à M, on a $M\gamma = R_0$. Menons par γ une parallèle à la tangente MP_1 et abaissons sur cette parallèle une perpendiculaire issue de O qui la rencontre en I. La droite $I\gamma$ étant normale à la développée de la courbe fondamentale, il est bien évident que le point I appartient à la podaire de la seconde développée de cette courbe relativement à O.

Soient donc ρ et ω les coordonnées polaires du point I. On a

$$OI = \rho = R_0 - r_1 = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} - \frac{r^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$360^\circ - \omega = 180^\circ - \theta_1 :$$

d'où, en différentiant par rapport à θ,

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{d\theta_1}{d\theta}.$$

[1] Note complémentaire à l'article de même titre paru en mars 1895, p. 89.

La différentielle $d\Sigma$ de l'aire de la courbe en question est donc

$$\frac{d\Sigma}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta_1}{d\theta}.$$

Or, on a trouvé

$$\frac{d\theta_1}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

Par conséquent,

$$(1) \qquad \frac{d\Sigma}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{(r'^4 + r^3 r'')^2}{(r^2 + r'^2)^2(r^2 + 2r'^2 - rr'')}.$$

Cette fonction sera intégrable lorsque r sera une fonction rationnelle, soit de θ, soit des lignes trigonométriques de θ. Il en sera ainsi lorsque la courbe fondamentale sera une courbe unicursale.

La formule (1) sera plus facile à calculer en l'écrivant sous la forme

$$(2) \qquad \frac{d\Sigma}{d\theta} = \frac{\frac{1}{r^2 + r'^2}\left[(r^2 + r'^2) - r^2\left(1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right)\right]^2}{2\left(1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right)},$$

car on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{r'}, \qquad \frac{dV}{d\theta} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

Soit maintenant I_1 le point analogue à I, situé sur la podaire de la seconde développée de la première podaire. Si ρ_1 et ω_1 sont les coordonnées de I_1, on a

$$\rho_1 = R_1 - r_2,$$
$$360^\circ - \omega_1 = 180^\circ - \theta_2,$$

et de même pour le point I_m de coordonnées ρ_m et ω_m, situé sur la podaire de la seconde développée de la $m^{\text{ième}}$ podaire,

$$\rho_m = R_m - r_{m+1},$$
$$360^\circ - \omega_m = 180^\circ - \theta_{m+1}.$$

D'après les relations (5), (6) et (11) de l'Article précité, et remarquant que

$$\frac{d\omega_m}{d\theta} = \frac{d\theta_{m+1}}{d\theta}$$

on a, pour la différentielle de l'aire de cette courbe (ρ_m, ω_m),

$$\frac{d\Sigma_m}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho_m^2 \frac{d\theta_{m+1}}{d\theta} = \frac{1}{2}(R_m - r_{m+1})^2 \frac{d\theta_{m+1}}{d\theta},$$

c'est-à-dire, toutes réductions faites,

$$(3) \quad \frac{d\Sigma_m}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{r^{2m}}{(r^2+r'^2)^{m+2}}\frac{[r'^4+r^3r''+mr'^2(r'^2-rr'')]^2}{[r^2+r'^2+(m+1)(r'^2-rr'')]}.$$

Pour $m=0$, on retombe bien sur la formule (1). D'ailleurs, cette formule est tout à fait générale, car en changeant m en $-m$, on a :

Aire de la podaire de la seconde développée de la $m^{ième}$ anti-podaire.

$$\frac{d\Sigma_{-m}}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{(r^2+r'^2)^{m-2}}{r^{2m}}\frac{[r'^4+r^3r''-mr'^2(r'^2-rr'')]^2}{[r^2+r'^2-(m-1)(r'^2-rr'')]}.$$

APPLICATIONS.

I. La courbe fondamentale est la cardioïde : le point O est au point de rebroussement de la cardioïde.

L'équation polaire de la cardioïde étant

$$r = a(1+\cos\theta),$$

on trouve

$$r^2+r'^2 = 2a^2(1+\cos\theta), \qquad \frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2} = \frac{1}{2}.$$

On a alors

$$d\Sigma = \frac{a^2}{3}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(2-3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2$$

ou, en posant $\theta = 2\varphi$, on a, pour l'aire totale Σ,

$$\Sigma = \frac{4a^2}{3}\left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi - 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi + 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi\, d\varphi\right).$$

Or,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{3\pi}{16},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi\, d\varphi = \frac{5\pi}{32}.$$

Donc

$$\Sigma = \frac{5\pi a^2}{24}.$$

II. La courbe fondamentale est l'ellipse : le point O est en son centre.

L'équation polaire de l'ellipse est

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}.$$

Or en déduit

$$\frac{r}{r'} = -\frac{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)}{c^2 \sin\theta \cos\theta},$$

$$r^2 + r'^2 = \frac{a^2 b^2 (a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3},$$

$$\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = -\frac{c^2 (a^2 \sin^2\theta - b^2 \cos^2\theta}{a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta},$$

$$1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = \frac{a^2 b^2}{a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta}.$$

Par conséquent

$$\frac{d\Sigma}{d\theta} = \frac{(a^2 \sin^2\theta - b^2 \cos^2\theta)}{2}$$
$$\times \left[\frac{a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^2} - \frac{a^2 b^2}{a^4 \sin^2\theta - b^4 \cos^2\theta}\right]^2.$$

En tenant compte de l'identité

$$a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta = (a^2 + b^2)(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta) - a^2 b^2,$$

on obtient, pour l'aire totale Σ,

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma}{2} = (a^4 + b^4) &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} \\ &- 2a^2 b^2 (a^2 + b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^2} \\ &+ a^4 b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3} \\ &+ a^4 b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)\, d\theta}{(a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^2}.\end{aligned}$$

En posant $\operatorname{tang}\theta = t$, on obtient, par la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, la valeur des intégrales du second membre de Σ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} = \frac{\pi}{2ab},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^2} = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{4a^3 b^3},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3} = \frac{\pi}{16a^5 b^5}(3a^4 + 3b^4 + 2a^2 b^2),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)\, d\theta}{(a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^2} = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{4a^4 b^4}.$$

On trouve alors, toutes réductions faites, pour l'aire Σ

$$\Sigma = \frac{3\pi c^4}{8ab} + \frac{\pi(a' + b')}{2} - \pi ab$$

ou

$$\Sigma = \frac{3\pi c^4}{8ab} + \frac{\pi(a - l)^2}{2}.$$

D'où il résulte la relation remarquable suivante :

L'aire de la podaire du centre de la seconde développée de l'ellipse est équivaleute à la somme des aires de la première développée et de la podaire du centre de cette première développée (¹).

III. La courbe fondamentale est la développante de cercle dont les coordonnées sont en fonction de l'angle de déroulement φ

$$x = R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi),$$
$$y = R(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi).$$

Le point O est au centre du cercle.

Il est bien évident que, dans le cas actuel, l'aire Σ est nulle.

Proposons-nous de calculer l'aire Σ_1, c'est-à-dire l'*aire de la podaire de la seconde développée de la première podaire de la développante du cercle.*

Nous n'avons pas l'équation de la développante en coordonnées polaires, sous une forme commode. On peut néanmoins appliquer les formules générales. En effet, on a

$$r^2 = R^2(1 + \varphi^2). \tag{4}$$

$$\tang\theta = \frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi + \varphi\sin\varphi}. \tag{5}$$

En différentiant l'équation (5), on trouve

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}. \tag{6}$$

(¹) Ce théorème est un cas particulier d'une propriété que je crois plus générale et que j'ai posée sous le n° 225 dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, t. I, page 117.

La différentiation de (4) donne

$$r\,dr = R^2 \varphi\, d\varphi$$

ou

$$rr' = R^2 \varphi \frac{d\varphi}{d\theta},$$

et d'après (6)

$$rr' = \frac{R^2(1+\varphi^2)}{\varphi}.$$

Donc

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{r'} = \varphi,$$

$$V = \operatorname{arc\,tang} \varphi$$

et

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = \frac{1}{1+\varphi^2}\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

On a encore

$$r^2 + r'^2 = \frac{R^2(1+\varphi^2)^2}{\varphi}, \qquad \frac{r^2}{r^2 + r'^2} = \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}.$$

La différentielle de l'aire Σ_1 est

$$\frac{d\Sigma_1}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{r^2}{(r^2+r'^2)}\frac{[r'^4 + r^3 r'' + r'^2(r'^2 - rr'')]^2}{[r^2 + r'^2 + 2(r'^2 - rr'')]}.$$

Au moyen de l'identité

$$r'^4 + r^3 r'' = (r^2 + r'^2)^2 - r^2[(r^2 + r'^2) + r^2 - rr'')],$$

on obtient facilement

$$\frac{d\Sigma_1}{d\varphi} = \frac{d\varepsilon_1}{d\theta}\frac{d\theta}{d\varphi},$$

$$d\Sigma_1 = \frac{R^2\, d\varphi}{2(\varphi^2+1)^2(\varphi^2+2)},$$

$$\frac{d\Sigma_1}{d\varphi} = \frac{R^2}{2}\left\{\frac{1}{(\varphi^2+1)^2} - \frac{1}{\varphi^2+1} + \frac{1}{\varphi^2+2}\right\}.$$

Si φ varie de o à l'∞, on obtient pour l'aire totale Σ_1

l'expression

$$\Sigma_1 = \frac{\pi R^2}{8}(\sqrt{2} - 1).$$

IV. La courbe fondamentale est la spirale logarithmique

$$r = ae^{n\theta};$$

le point O est au pôle de la spirale.

On sait que les podaires successives d'une spirale logarithmique, par rapport à son pôle, sont des spirales logarithmiques : les développées successives sont aussi des spirales logarithmiques. Il en résulte que les courbes Σ, Σ_1, ..., Σ_m sont également des spirales logarithmiques.

On a

$$r' = nae^{n\theta}, \qquad r'' = n^2 ae^{n\theta}, \qquad r'^2 - rr'' = 0,$$

$$r^2 + r'^2 = (1 + n^2)\, a^2 e^{2n\theta},$$

de sorte que

$$\frac{d\Sigma}{d\theta} = \frac{n^4}{2(1 + n^2)}\, a^2 e^{2n\theta}$$

et, en intégrant entre les limites $\theta = -\infty$ et $\theta = 0$, on trouve une aire finie

$$\Big[\Sigma\Big]_{\theta=-\infty}^{\theta=0} = \frac{a^2 n^3}{4(1 + n^2)}.$$

On obtient facilement l'équation de la courbe Σ, en remarquant que

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{r'} = \frac{1}{n}, \qquad R_0 = a\sqrt{1 + n^2}\, e^{n\theta}, \qquad r_1 = \frac{r}{\sqrt{1 + n^2}}.$$

Or,

$$\rho = R_0 - r_1 = a\sqrt{1 + n^2}\, e^{n\theta} - \frac{r}{\sqrt{1 + n^2}},$$

$$\rho = \frac{an^2 e^{n\theta}}{\sqrt{1 + n^2}},$$

$$180^\circ + \theta = \omega.$$

de sorte que l'équation polaire de la courbe Σ est

$$\rho = \frac{an^2}{\sqrt{1+n^2}} e^{n(\omega-\pi)}.$$

C'est bien une spirale logarithmique.

V. La courbe fondamentale est la spirale d'Archimède

$$r = a\theta;$$

le point O est au pôle de la spirale.

On trouve alors pour la différentielle de l'aire Σ

$$d\Sigma = \frac{a^2 d\theta}{2(\theta^2-2)(\theta^2+1)^2}.$$

C'est la même expression que celle de $d\Sigma_1$ dans l'exemple (III), relatif à la développante de cercle. On a donc, en intégrant de o à l'∞,

$$\sum = \frac{\pi a^2}{8}(\sqrt{2}-1).$$

Cette identité de l'aire Σ actuelle et de l'aire Σ_1 de l'exemple III provient de ce que *la podaire de la développante de cercle par rapport au centre du cercle est une spirale d'Archimède.*

SUR LE CENTRE DE COURBURE DES PODAIRES.

Au sujet de la Lettre de M. Maurice d'Ocagne [1];

Par M. E.-N. BARISIEN.

Par une coïncidence heureuse, en même temps que la lettre de M. d'Ocagne, le numéro de mars 1895 des

[1] *Nouvelles Annales*, p. 111; mars 1895.

Nouvelles Annales publiait (p. 89) un Article sur les podaires successives d'une courbe. La formule que j'ai donnée à la page 93,

$$R_1 = \frac{r^2}{2r - R_0 \sin V},$$

permet de trouver sur la figure de M. d'Ocagne (p. 112) la longueur de $P\omega$ et montre que cette longueur est R_1.

Conservons la notation de l'article précité et posons

$$\widehat{OQ\omega} = \varphi, \qquad \widehat{QO\gamma} = \psi.$$

On a

$$PN = OM = r, \qquad \widehat{OMN} = \widehat{OPN} = V - 90^\circ, \qquad M\gamma = R_0.$$

On a, dans le triangle $PQ\omega$,

$$\frac{\overline{P\omega}}{\sin\varphi} = \frac{\overline{PQ}}{\sin(\varphi + V - 90^\circ)}.$$

Or, $PQ = \frac{r}{\sin V}$; donc

$$(1) \qquad \overline{P\omega} = \frac{r \operatorname{tang}\varphi}{\sin V(\operatorname{tang}\varphi \sin V - \cos V)}.$$

Il reste à exprimer $\operatorname{tang}\varphi$. Or, dans le triangle OQK, on a

$$(2) \qquad \frac{\sin\varphi}{OK} = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{OQ}.$$

Mais

$$OK = \frac{O\gamma}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \sin V},$$

$$OQ = \frac{r\cos^2 V}{\sin V},$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{ON}{N\gamma} = \frac{-r\cos V}{R_0 - r\sin V},$$

$$\sin\psi = \frac{-r\cos V}{\sqrt{r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \sin V}},$$

$$\cos\psi = \frac{R_0 - r\sin V}{\sqrt{r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \sin V}}.$$

De (2), on tire

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\overline{OK}\sin\psi}{\overline{OQ} - \overline{OK}\cos\psi}.$$

En y substituant les valeurs précédentes, on obtient

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{-r\sin V\cos V}{r(1+\cos^2 V) - R_0\sin V},$$

valeur qui, portée dans (1), donne

$$\overline{P\omega} = \frac{r^2}{2r - R_0\sin V}.$$

Donc, $P\omega = R_1$. Le point ω défini par M. d'Ocagne est bien le centre de courbure de la podaire correspondant au point P. J'arrive ainsi à une démonstration analytique du théorème de M. d'Ocagne.

Il serait d'ailleurs intéressant, d'après le *desideratum* exprimé par M. d'Ocagne, de trouver une démonstration géométrique directe de cette propriété.

SUR LE PROBLÈME DE L'INTERPOLATION DANS LES SUITES RÉCURRENTES;

PAR M. ED. MAILLET,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Ce problème a été défini ainsi qu'il suit par M. M. d'Ocagne [1] :

Dans chacun des intervalles laissés entre les termes

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, p. 193; 1894. A l'endroit cité, M. d'Ocagne indique pour la solution de ce problème une méthode

consécutifs d'une suite récurrente du $p^{\text{ième}}$ ordre, intercaler $k-1$ termes de façon que la nouvelle suite ainsi obtenue soit elle-même récurrente du $p^{\text{ième}}$ ordre.

Une telle interpolation est dite une interpolation d'indice $k-1$.

Nous cherchons ici à résoudre ce problème en traitant le problème inverse : à quelles lois sont soumises les suites obtenues Σ en prenant dans une suite récurrente S les termes de k en k à partir d'un terme arbitrairement choisi.

Nous supposerons toujours la loi d'ordre p de la suite S irréductible.

I. — *L'équation génératrice irréductible de la suite* S *a ses racines distinctes.*

Soient x_n le terme général de la suite S,

$$x_{n+p} = A_1 x_{n+p-1} + \ldots + A_p x_n, \tag{1}$$

la loi réductible de cette suite,

$$\xi^p = A_1 \xi^{p-1} + \ldots + A_p \tag{2}$$

son équation génératrice correspondante, de racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, et $\neq 0$.

Soit

$$y_0, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_s, \quad y_{s+1}, \quad \ldots \tag{3}$$

la suite obtenue en prenant dans la suite (1) les termes de k en k à partir d'un terme quelconque arbitraire-

---

générale fondée sur l'emploi des suites fondamentales et développe complètement cette solution dans le cas des suites du second ordre.

ment choisi ; on aura [1]

$$(4)\quad \begin{cases} y_s = x_n = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + \ldots + a_p\lambda_p^n, \\ y_{s+1} = x_{n+k} = a_1\lambda_1^{n+k} + a_2\lambda_2^{n+k} + \ldots + a_p\lambda_p^{n+k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{s+p} = x_{n+pk} = a_1\lambda_1^{n+pk} + a^2\lambda_2^{n+pk} + \ldots + a_p\lambda_p^{n+pk}. \end{cases}$$

Ceci posé, nous remarquerons que, puisque λ_1, λ_2, ..., λ_p sont distincts, l'équation (2) pourra s'écrire

$$(5)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \xi & \lambda_1 & \ldots & \lambda_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi^p & \lambda_1^p & \ldots & \lambda_p^p \end{vmatrix} = 0,$$

d'après les propriétés connues des déterminants de Vandermonde, en sorte que (1) s'écrira

$$\begin{vmatrix} x_n & 1 & \ldots & 1 \\ x_{n+1} & \lambda_1 & \ldots & \lambda_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n+p} & \lambda_1^p & \ldots & \lambda_p^p \end{vmatrix} = 0.$$

Or, on arrive immédiatement à ces formules en considérant les formules analogues à (4) qui donnent x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+p}. Dès lors, un procédé analogue nous donnera la loi à laquelle satisfait la suite (3).

Supposons que parmi les puissances λ_1^k, λ_2^k, ..., λ_p^k il y en ait

$$(7)\quad \begin{cases} i_1 \text{ égales à } \lambda_1^k, \text{ que l'on peut désigner par } \lambda_1^k, \lambda_1'^k, \ldots, \\ i_2 \text{ égales à } \lambda_2^k, \qquad \text{»} \qquad \lambda_2^k, \lambda_2'^k, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ i_{p_1} \text{ égales à } \lambda_{p_1}^k, \qquad \text{»} \qquad \lambda_{p_1}^k, \lambda_{p_1}'^k, \ldots, \end{cases}$$

$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_{p_1}^k$ étant distinctes et $i_1 + i_2 + \ldots + i_{p_1} = p$.

---

[1] D'après les formules connues de Lagrange.

Ceci revient à dire que le rapport de deux racines de (2) est ou non une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité suivant que toutes deux sont ou ne sont pas contenues dans une même ligne de (7).

Les relations (4) donneront

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} y_s = (a_1\lambda_1^n + a'_1\lambda_1'^n + \ldots) + (a_2\lambda_2^n + a'_2\lambda_2'^n + \ldots) + \ldots \\ \qquad\qquad + (a_{p_1}\lambda_{p_1}^n + a'_{p_1}\lambda_{p_1}'^n + \ldots), \\ y_{s+1} = (a_1\lambda_1^n + a'_1\lambda_1'^n + \ldots)\lambda_1^k + (a^2\lambda_2^n + a'_2\lambda_2'^n + \ldots)\lambda_2^k + \ldots \\ \qquad\qquad + (a_{p_1}\lambda_{p_1}^n + a'_{p_1}\lambda_{p_1}'^n + \ldots)\lambda_{p_1}^k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{s+p_1} = (a_1\lambda_1^n + a'_1\lambda_1'^n + \ldots)\lambda_1^{p_1k} + (a_2\lambda_2^n + a'_2\lambda_2'^n + \ldots)\lambda_2^{p_1k} + \ldots \\ \qquad\qquad + (a_{p_1}\lambda_{p_1}^n + a'_{p_1}\lambda_{p_1}'^n + \ldots)\lambda_{p_1}^{p_1k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

d'où

$$(9)\quad \begin{vmatrix} y_s & 1 & 1 & 1 \\ y_{s+1} & \lambda_1^k & \lambda_2^k & \lambda_{p_1}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{s+p_1} & \lambda_1^{p_1k} & \lambda_2^{p_1k} & \lambda_{p_1}^{p_1k} \end{vmatrix} = 0$$

quel que soit s; la loi de récurrence (9) est donc une loi à laquelle satisfait la suite (3); elle est la même pour les k suites distinctes analogues à (3) que l'on obtient à l'aide de (1). Je dis que c'est la plus petite loi commune à ces k suites.

Indiquons d'abord comment on pourra trouver la plus petite loi commune à k suites récurrentes quelconques: soient $\Theta_1(\xi) = 0$, $\theta_2(\xi) = 0, \ldots, \theta_k(\xi) = 0$ les équations génératrices irréductibles de ces k suites, $\Theta(\xi)$ le plus petit commun multiple des polynomes $\theta_1(\xi)$, $\theta_2(\xi), \ldots, \theta_k(\xi)$. Les k suites satisfont [1] à la loi d'équation génératrice $\Theta(\xi) = 0$. Réciproquement, si les k suites satisfont à une loi d'équation génératrice

---

[1] Voir d'Ocagne, *loc. cit.*, p. 181, et une Note parue dans les *Nouvelles Annales;* 1895.

$H(\xi) = 0$, $H(\xi)$ est divisible par $\theta_1(\xi), \theta_2(\xi), \ldots, \theta_k(\xi)$, et en conséquence par $\Theta(\xi)$. On peut donc dire que la loi d'équation génératrice $\Theta(\xi) = 0$ est la plus petite loi commune aux k suites.

Or, les k suites (3) satisfont à la loi (9) d'équation génératrice

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \xi & \lambda_1^k & \ldots & \lambda_{p_1}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi^{p_1} & \lambda_1^{p_1 k} & \ldots & \lambda_{p_1}^{p_1 k} \end{vmatrix} = 0,$$

dont les racines sont $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_{p_1}^k$. Si la loi (9) n'est pas la plus petite loi commune aux k suites, ces dernières satisferont à une loi d'ordre plus petit dont le polynome générateur aura au moins un facteur de moins, $(\xi - \lambda_1^k)$ par exemple, que le polynome générateur (10). On en conclut facilement en exprimant d'après les formules de Lagrange $y_s, y_{s+1}, \ldots$, en fonction des racines de l'équation génératrice irréductible de la suite (3) et égalant aux expressions (8), que le coefficient de $\lambda_1, \ldots, \lambda_1^{p_1 k}$ dans ces dernières expressions est nul, et cela quelle que soit celle des k suites (3) considérée. En les prenant successivement, on en déduira

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{r} a_1 + a'_1 + \ldots = 0, \\ a_1 \lambda_1 + a'_1 \lambda'_1 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1 \lambda_1^{k-1} + a'_1 \lambda_1'^{k-1} + \ldots = 0. \end{array} \right.$$

Ces relations ont lieu entre les i_1 racines dont les puissances $k^{\text{ièmes}}$ appartiennent à la première ligne de (7). On a d'ailleurs $i_1 \leq k$, puisque ces i_1 racines sont distinctes et que leur rapport à l'une d'entre elles arbitrairement choisie doit être une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité distincte pour chacune d'elles. Les relations (11) donne-

raient alors ou $a_1 = a'_1 = \ldots = 0$, et la suite (1) serait d'ordre p réductible contrairement à l'hypothèse, ou

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda'_1 & \ldots \\ \lambda_1^{\gamma_1-1} & \lambda_1'^{\gamma_1-1} & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui n'a pas lieu, puisque $\lambda_1, \lambda'_1, \ldots$ sont distinctes. On voit donc qu'en supposant l'existence d'une loi commune aux k suites (3) plus petite que la loi (9), on est conduit à un résultat absurde. Dès lors :

La loi (9), *d'équation génératrice* (10) *est la plus petite loi commune aux k suites* (3).

Les relations (8) montrent que la condition nécessaire et suffisante pour que la loi (9) soit irréductible pour une des suites Σ est que les coefficients de $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_{p_1}^k$ dans y_{s+1} soient tous différents de zéro. Or la loi (1) étant irréductible, et $a_1, a_2, \ldots, a_p$ différents de zéro, cette condition aura toujours lieu en particulier pour chacune des k suites si $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_p^k$, c'est-à-dire les puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de (2), sont toutes distinctes, ou si le rapport de deux des racines de (2) ne peut être une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité ; donc :

Si l'on ne peut trouver deux racines de l'équation génératrice irréductible (2) *de la suite* (1) *dont le rapport soit une racine* $k^{\text{ième}}$ *de l'unité, les k suites* (3) *satisferont simultanément à la loi irréductible* (9).

Remarque I. — On doit noter l'intervention dans ce qui précède de l'équation aux puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines d'une équation.

D'abord l'équation (10) n'est autre que l'équation ayant pour racines les puissances $k^{\text{ièmes}}$ distinctes des racines de (2) ou (5) ; mais on obtient de la manière

suivante l'équation ayant pour racines les k puissances $k^{\text{ièmes}}$, distinctes ou non, des racines de (2) ou (5); considérant les relations

$$(12)\quad \begin{cases} x_{n+p} = A_1 x_{n+p-1} + \ldots + A_p x_n, \\ x_{n+p+1} = A_1 x_{n+p} + \ldots + A_p x_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n+pk} = A_1 x_{n+pk-1} + \ldots + A_p x_{n+(k-1)p}, \end{cases}$$

remplaçant x_n, x_{n+k}, ..., x_{n+pk} par y_s, y_{s+1}, ..., y_{s+p} et éliminant les autres quantités x_i, nous obtiendrons, sous forme d'un déterminant égalé à zéro, une relation de récurrence entre y_s, y_{s+1}, ..., y_{s+p}, dont l'équation génératrice est précisément l'équation cherchée. La chose est évidente dans le cas où λ_1^k, λ_2^k, ..., λ_p^k sont distincts; on en conclut facilement qu'elle a lieu encore, par raison de continuité, quand certaines de ses quantités sont égales.

Remarque II. — Ce qui précède donne un moyen de simplifier l'étude de certaines suites récurrentes : supposons que l'équation génératrice irréductible d'une suite, de racines distinctes, en possède deux λ_1, λ_2, par exemple, telles que $\lambda_1 = \lambda_2 r$, r étant une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité. On a $\lambda_1^k = \lambda_2^k$, et dès lors les k suites récurrentes formées en partant de chacun des termes x_0, x_1, ..., x_{k-1} et prenant les termes de la suite proposée de k en k, satisfont à une loi commune d'ordre plus petit que celui de la proposée.

En particulier, si les rapports de toutes les racines à λ_1 sont des racines de l'unité, ces dernières satisferont à une même relation $r^k - 1 = 0$, k étant convenablement choisi, et la suite proposée se décomposera en k suites d'équation génératrice $\xi - \lambda_1^k = 0$, c'est-à-dire en k progressions géométriques.

II. — *L'équation génératrice irréductible de la suite* S *a des racines égales.*

Les raisonnements étant semblables à ceux du paragraphe précédent, nous pourrons abréger.

Conservons les notations des formules (1), (2), (3), et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p'}$ les racines distinctes de (2), $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{p'}$ leurs degrés de multiplicité respectifs. On aura [1]

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} y_s = x_n = \lambda_1^n f_1(n) + \ldots + \lambda_{p'}^n f_{p'}(n), \\ y_{s+1} = x_{n+k} = \lambda_1^{n+k} f_1(n+k) + \ldots + \lambda_{p'}^n f_{p'}(n+k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où $f_1(n), \ldots, f_{p'}(n)$ sont des polynomes entiers en n de degrés respectifs $\rho_1^{-1}, \rho_2^{-1}, \ldots, \rho_{p'}^{-1}$. Dans ces polynomes les coefficients des puissances les plus élevées de n sont $\neq 0$, puisque la loi d'équation génératrice (2) est irréductible (d'ordre $p = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_{p'}$).

Supposons que, parmi les puissances $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_p^k$, il y en ait

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{llllll} i_1 & \text{égales à } \lambda_1^k, & \text{que l'on peut désigner par} & \lambda_1^k, \lambda_1'^k, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ i_2 & \text{»} \quad \lambda_2^k, & \text{»} & \text{»} & \lambda_2^k, \lambda_2'^k, \ldots, \\ i_{p'_1} & \text{»} \quad \lambda_{p_1}^k, & \text{»} & \text{»} & \lambda_{p'_1}^k, \lambda_{p'_1}'^k, \ldots, \end{array}\right.$$

$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_{p'_1}^k$ étant distinctes et $l_1 + i_2 + \ldots + i_{p'_1} = p'$. Parmi les quantités $\lambda_l, \lambda'_l, \ldots$ dont les puissances $k^{\text{ièmes}}$ appartiennent à une même ligne de (14), considérons celle dont l'ordre de multiplicité dans (2) est le plus grand, et supposons par exemple que ce soit λ_l.

Je dis que les k suites Σ analogues à (13) satisferont à

---

[1] D'après les formules connues de Lagrange.

la loi d'équation génératrice

$$(15)\qquad (\xi-\lambda_1^k)^{\rho_1}(\xi-\lambda_2^k)^{\rho_2}\ldots(\xi-\lambda_{p'_1}^k)^{\rho_{p'_1}}=0$$

et que cette loi sera la plus petite loi commune à ces k suites.

Vérifions d'abord le premier point.

Les équations (13) pourront s'écrire

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
y_s = x_n &= [\lambda_1^n f_1(n)+\lambda_1'^n f_1'(n)+\ldots]+\ldots\\
&\quad +[\lambda_{p'_1}^n f_{p'_1}(n)+\lambda_{p'_1}'^n f_{p'_1}'(n)+\ldots],\\
y_{s+1} = x_{n+k} &= [\lambda_1^{n+k} f_1(n+k)+\lambda_1'^{n+k} f_1'(n+k)+\ldots]+\ldots\\
&\quad +[\lambda_{p'_1}^{n+k} f_{p'_1}(n+k)+\lambda_{p'_1}'^{n+k} f_{p'_1}'(n+k)+\ldots],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_{s+j} = x_{n+jk} &= [\lambda_1^{n+jk} f_1(n+jk)+\lambda_1'^{n+jk} f_1'(n+jk)+\ldots]+\ldots\\
&\quad +[\lambda_{p'_1}^{n+jk} f_{p'_1}(n+jk)+\lambda_{p'_1}'^{n+jk} f_{p'_1}'(n+jk)+\ldots],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

n étant un nombre entier arbitrairement choisi, mais donné, et j un entier quelconque.

En désignant par $\varphi_1(j)$, $\varphi_2(j)$, ..., $\varphi_{p'_1}(j)$ des polynomes entiers en j de degrés respectifs au plus égaux à ρ_1-1, ρ_2-1, ..., $\rho_{p'_1}-1$, (13) devient, d'après (16),

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
y_s &= \varphi_1(0)+\ldots+\varphi_{p'_1}(0),\\
y_{s+1} &= \lambda_1^k\varphi_1(1)+\ldots+\lambda_{p'_1}^k\varphi_{p'_1}(j),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_{s+j} &= \lambda_1^{jk}\varphi_1(j)+\ldots+\lambda_{p'_1}^{jk}\varphi_{p'_1}(j),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

ce qui montre immédiatement que la suite y_s, y_{s+1}, ... satisfait [1] à la loi d'équation génératrice (15); il en

---

[1] On verrait de la même manière que la suite $\lambda_1^n f_1(n)$, ..., $\lambda_1^{n+k} f_1(n+k)$, ..., $\lambda_1^{n+jk} f_1(n+jk)$, ... satisfait à la loi d'équa-

est donc de même des k, suites Σ, puisque (15) ne dépend pas de n.

Vérifions le second point :

Si une des suites (17) satisfait à une loi d'équation génératrice ayant son degré inférieur à celui de (15), elle satisfera à une loi dont l'équation génératrice sera, par exemple, de la forme

$$(\xi - \lambda_1^k)^{\rho_1 - 1}\Phi(\xi) = 0.$$

$\Phi(\xi)$ n'admettant pas le facteur $(\xi - \lambda_1^k)$, le coefficient de la puissance $\rho_1 - 1$ de j dans $\varphi_1(j)$ devra être nul. Si $a_1, a'_1, \ldots$ désignent les i_1 coefficients de $n^{\rho_1 - 1}$ dans les i_1 polynomes $f_1(n), f'_1(n), \ldots$ faisant partie de la première parenthèse du dernier membre des expressions (16), un au moins, a_1, de ces coefficients est $\neq 0$, puisque la loi (1) est irréductible pour la suite S, et il faudra

$$a_1\lambda_1^{n+jk} + a'_1\lambda_1^{n+jk} + \ldots = 0;$$

et si la loi d'équation génératrice (15) n'est pas la plus petite loi commune aux k suites Σ, on en conclura encore k relations de la forme (11) que l'on reconnaîtra être impossibles. Donc

La loi d'équation génératrice (15) *est la plus petite loi commune aux k suites* (3).

De même, la condition nécessaire et suffisante pour que la loi d'équation génératrice (15) soit irréductible pour une des suites Σ est que les coefficients des puis-

---

tion génératrice $(\xi - \lambda_1^k)^{\beta_1}$, ce qui donne l'identité

$$f_1(n+jk) - \ldots + (-1)^\alpha C_{\beta_1}^\alpha f_1(n+[j-\alpha]k) + \ldots + (-1)^{\beta_1} f_1(n+[j-\beta_1]k) = 0,$$

f_1 étant un polynome quelconque de degré $\leq \beta_1 - 1$.

sances $\rho_1 - 1, \rho_2 - 1, \ldots, \rho_{p'} - 1$ de j dans les polynomes $\varphi_1(j), \varphi_2(j), \ldots, \varphi_{p'}(j)$ respectivement soient $\neq 0$.

Cela aura lieu en particulier si, parmi les racines λ_l $\lambda'_l, \ldots$ dont les puissances $k^{\text{ièmes}}$ font partie d'une même ligne de (14), il n'y en a qu'une dont le degré de multiplicité dans (2) soit ρ_l, quel que soit l.

Si, parmi les racines de l'équation génératrice irréductible (2) de la suite (1), dont le rapport à l'une d'elles est une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité, il n'y en a pas deux qui possèdent un ordre de multiplicité égal et maximum parmi ceux de ces mêmes racines, les k suites (3) satisfont simultanément à la loi irréductible d'équation génératrice (15).

Ceci est applicable en particulier aux suites S d'équation génératrice irréductible $(\xi - \lambda_1)^p = 0$.

Remarque I. — On doit noter encore l'intervention de l'équation aux puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de (2).

Remarque II. — Ce qui précède permet encore de simplifier l'étude de certaines suites récurrentes : il suffit que l'équation génératrice irréductible d'une suite S possède deux racines λ_1, λ_2 dont le rapport soit une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité pour que les termes de S pris de k en k forment k suites satisfaisant à une loi commune d'ordre plus petit que celui de S.

En particulier, si les rapports de toutes les racines à λ_1 sont des racines de l'unité, on peut trouver k de façon à décomposer S en k suites Σ satisfaisant à une même équation génératrice

$$(\xi - \lambda_1^k)^{\rho_1} = 0, \tag{18}$$

λ_1 étant la racine d'ordre de multiplicité maximum dans l'équation génératrice irréductible de S. Si cette der-

nière ne possède pas une racine $\neq \lambda_1$ et d'ordre de multiplicité égal à ρ_1, l'équation génératrice (18) est irréductible pour les k suites Σ.

Quand $\rho_1 = 2$ et quand toutes les racines de (2) sont des racines de l'unité, on voit qu'on peut trouver k tel que les k suites (3) ou (13) soient des progressions arithmétiques ou géométriques; on obtiendra exclusivement ainsi des progressions arithmétiques si en même temps l'équation (2) n'a qu'une racine double.

Si en particulier la suite (1) est du deuxième ordre, son équation génératrice sera d'une des deux formes $(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2) = 0$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ou $(\xi - \lambda_1)^2 = 0$. Dans le premier cas, (10) devient $(\xi - \lambda_1^k)(\xi - \lambda_2^k) = 0$ si $\lambda_1^k \neq \lambda_2^k$ ou $(\xi - \lambda_1^k) = 0$ si $\lambda_1^k = \lambda_2^k$; dans le deuxième, (15) devient $(\xi - \lambda_1^k)^2 = 0$ et est irréductible pour les k suites (3). Pour $\lambda_1^k = 1$, on retrouve alors un théorème de M. d'Ocagne [1] :

Si, dans une suite récurrente du deuxième ordre, les termes pris de k en k à partir d'un certain terme forment une progression arithmétique, il en est de même à partir d'un terme quelconque.

A titre de vérification de ce qui précède, nous citerons non seulement le Mémoire de M. d'Ocagne, mais encore une Note de M. Appell [2] sur *les fractions continues périodiques :* si k est le nombre des quotients de la période, les numérateurs et les dénominateurs des réduites forment respectivement une suite récurrente dont l'équation génératrice irréductible a $2k$ racines qui sont le produit de deux d'entre elles convenablement choisies

---

[1] Mémoire déjà cité, p. 199.

[2] *Archiv der Math. und Phys.*, 1878, t. LXII, p. 183. *Voir* aussi le Mémoire précité, p. 217.

par les k racines de l'équation $\xi^k - 1 = 0$. Chacune de ces deux suites pourra donc se décomposer en k suites récurrentes du deuxième ordre, ce qui résulte d'ailleurs immédiatement de la forme spéciale de l'équation génératrice.

III. — *Le problème de l'interpolation dans les suites récurrentes.*

C'est le problème inverse de celui que nous venons de résoudre : il s'agit de trouver toutes les suites (1) qui peuvent conduire à une même suite (3).

Soit q l'ordre de la loi irréductible de (3); l'ordre p de la loi irréductible de (1) sera $\geqq q$.

Si l'on veut que $p = q$, il suffira d'identifier l'équation irréductible E_0 de (3), suivant qu'elle aura ou non des racines égales, avec (15) ou (10) : l'équation irréductible E de (1) aura pour racines les racines $k^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation irréductible de (3) avec les mêmes ordres de multiplicité respectifs.

Si l'on veut que E_0 soit la plus petite équation génératrice commune aux k suites analogues à (3) que l'on pourra déduire de (1), E aura encore toutes ses racines distinctes ou non en même temps que E_0, et ces racines seront encore des racines $k^{\text{ièmes}}$ de celles de E_0. En mettant E_0 sous la forme (15) ou (10) et tenant compte des conditions (14) ou (7), on déterminera facilement les équations génératrices (2) d'ordre p admissibles : d'après (14) ou (7) il faudra évidemment $p \leqq qk$.

Dans le cas général, on remarquera que le polynome générateur irréductible de (3) est un diviseur du premier membre de (15) ou (10). Il suffira donc de multiplier ce polynome par un polynome quelconque et de considérer le produit E'_0 comme le plus petit polynome

générateur commun aux k suites analogues à (3) que l'on pourra déduire de (1), de l'identifier avec (15) ou (10), puis d'en déduire (1) et (2) comme précédemment, en tenant compte de ce que E_0 et E sont irréductibles.

Nous nous contenterons simplement d'indiquer la solution dans le cas où E doit n'avoir que des racines distinctes, ce qui exige que E_0 n'ait que des racines distinctes.

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ les racines de E_0, $\mu_{q+1}, \ldots, \mu_q$ les autres racines de E'_0. D'après (7) et (8) on devra avoir, à cause de la relation

$$y_{s+t} = b_1 \mu_1^t + b_2 \mu_2^t + \ldots + b_q \mu_q^t + 0.\mu_{q+1}^t + \ldots + 0.\mu_q^t,$$

quel que soit t, s étant donné,

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = a_1 \lambda_1^n + a'_1 \lambda'^n_1 + \ldots, \\ b_2 = a_2 \lambda_2^n + a'_2 \lambda'^n_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = a_{q+1} \lambda_{q+1}^n + a'_{q+1} \lambda'^n_{q+1} - \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = a_{q'} \lambda_{q'}^n + a'_{q'} \lambda'^n_{q'} + \ldots. \end{array} \right.$$

Dans ces formules on aura $q' = p_1$, $b_1 \neq 0, \ldots, b_q \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a'_1 = 0, \ldots; \ldots; a_{q'} \neq 0$, $a'_{q'} \neq 0, \ldots$, et de plus

$$\mu_1 = \lambda_1^k = \lambda'^k_1 = \ldots; \qquad \ldots; \qquad \mu_{q'} = \lambda_{q'}^k = \lambda'^k_{q'} = \ldots.$$

$\lambda_1, \lambda'_1, \ldots; \ldots; \lambda_{q'}, \lambda'_{q'}, \ldots$, étant distinctes.

On pourra toujours satisfaire à toutes ces conditions pourvu toutefois que dans chacune des $q' - q$ dernières équations (18) on ait au moins deux racines λ_l.

IV. — *Des suites autointerpolables.*

Nous ne considérerons comme suites autointerpolables que les suites analogues à (3) d'équation génératrice irréductible E_0 telles qu'après interpolation la suite (1) obtenue ait aussi pour équation génératrice, évidemment irréductible d'après ce qui précède, E_0.

1° E_0 *n'a que des racines distinctes.* — On identifiera E_0 avec (5) et (10) à la fois. Les puissances $k^{\text{ième}}$ des racines de E_0 seront les racines de E_0 prises dans un ordre différent ou non

$$\lambda_1^k = \lambda_{i_1}, \qquad \lambda_2^k = \lambda_{i_2}, \qquad \ldots, \qquad \lambda_p^k = \lambda_{i_p}.$$

On en conclut que toutes les racines de E_0 satisfont à une même relation

$$\xi^{k^m - 1} = 1$$

et que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des racines de l'unité. Il en résulte facilement, d'après les formules de Lagrange,

$$x_n = x_{n+k^m-1},$$

quel que soit n. La suite récurrente proposée ne renfermera, à proprement parler, que $k^m - 1$ termes distincts au plus.

2° E_0 *a des racines multiples.* — On identifiera encore E_0 avec (2) et (15). Les puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de E_0 qui sont d'ordre de multiplicité ρ seront ces mêmes racines prises dans un ordre différent ou non. On en conclut encore que les racines de E_0 sont des racines de l'unité.

Mais ici les formules (13) montrent immédiatement, puisque E_0 est irréductible pour les suites considérées et que par suite $f_1(n), \ldots, f_p(n)$ prennent une infi-

nité de valeurs avec n, que la suite considérée contiendra une infinité de termes distincts.

Exemples. — Comme exemple du premier cas, on peut citer les suites d'équation génératrice irréductible

$$\xi^p - 1 = 0,$$

qui sont autointerpolables d'indice $k - 1$, pour k premier à p, et les suites telles que

$$\lambda_l^k = \lambda_l,$$

quel que soit l.

Comme exemple du deuxième cas, nous citerons : les suites pour lesquelles E_0 est de la forme

$$(\xi - 1)^p = 0,$$

qui sont autointerpolables d'indice $k - 1$ quelconque; les suites pour lesquelles E_0 est de la forme

$$(\xi - 1)^{\rho_1}(\xi + 1)^{\rho_2} = 0$$

ou

$$(\xi - 1)^{\rho_1}(\xi + 1)^{\rho_2}(\xi^2 + 1)^{\rho_3} = 0,$$

autointerpolables d'indice $(k - 1)$ pair quelconque; les suites pour lesquelles E_0 est de la forme

$$(\xi - 1)^{\rho_1}(\xi + 1)^{\rho_2}(\xi - i)^{\rho_3}(\xi + i)^{\rho_4} = 0,$$

où

$$i = \sqrt{-1},$$

autointerpolaires d'indice $k - 1 = 4k'$; les suites pour lesquelles E_0 n'admet comme racines que des racines de $\xi^q - 1 = 0$, qui sont autointerpolables d'indice $k - 1 = mq$ (m quelconque entier).

On voit en particulier qu'une progression arithmétique, d'équation génératrice irréductible $(\xi - 1)^2 = 0$, est autointerpolable d'indice $k - 1$ quelconque.

D'après ce qui précède, les valeurs de l'indice pour

lesquelles une suite d'équation génératrice irréductible E_0 est autointerpolable forment une ou plusieurs progressions arithmétiques.

A titre de vérification, nous renvoyons à ce qu'a fait M. d'Ocagne pour les suites du deuxième ordre [1].

NOTE SUR LA FORMATION DES CARRÉS DES NOMBRES;

PAR M. J. PICHOT.

I. CARRÉ D'UN NOMBRE TERMINÉ PAR UN 5. — En désignant par d le nombre des dizaines, le nombre est exprimé par $10d + 5$. Or,

$$(10d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25 = d(d + 1)100 + 25.$$

Le carré est donc terminé par 25, et, pour avoir le nombre total des centaines du carré, il suffit de multiplier d par $d + 1$.

EXEMPLES : 1° *Carré de* 35. — Le produit de 3 par $3 + 1$ étant égal à 12, on en conclut immédiatement que le carré de 35 est 1225;

2° *Carré de* 65. — Le produit de 6 par 7 étant égal à 42, on en conclut immédiatement que le carré de 65 est 4225;

3° *Carré de* 375. — Le produit de 37 par $37 + 1$ étant 1406, on en conclut que le carré de 375 est 140625.

Donc : Quand un nombre n'a que deux figures, on a *immédiatement* son carré en faisant le produit de deux nombres d'un seul chiffre. La simplification est ici évidente.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 201 et suiv.

Si le nombre a plus de deux figures, on trouve le nombre des centaines du carré par une multiplication plus simple que par la méthode ordinaire, puisqu'on opère la multiplication sur des facteurs composés d'un plus petit nombre de chiffres. C'est ainsi que, dans le troisième exemple, au lieu de multiplier 375 par 375, il a suffi de multiplier 37 par 38.

II. Carré d'un nombre quelconque. — Si l'on forme le tableau des carrés des nombres entiers consécutifs, à partir du nombre 4 inclusivement, on voit que la série se compose de groupes alternativement composés de quatre et de six nombres. Les groupes d'ordre impair composés de quatre nombres contiennent un multiple impair de 5 qui occupe le second rang, et les groupes d'ordre pair, qui sont composés de six nombres, contiennent un multiple pair de 5 qui occupe le troisième rang.

Le multiple pair ou impair de 5 donne le numéro du groupe et, dans chaque groupe, en passant d'un carré au suivant, *le nombre total des dizaines du carré est augmenté d'autant d'unités qu'il y en a dans le rang du groupe.*

Cela établi, proposons-nous de former le carré d'un nombre de deux chiffres, de 24 par exemple. C'est le premier nombre du groupe auquel appartient 25 dont le carré est 625. C'est le cinquième groupe. Par conséquent, le carré de 24 doit contenir 5 dizaines de moins que le carré de 25 qui en contient 62. Le carré de 24 est donc 576.

Prenons un autre exemple. Quel est le carré de 63? Ce nombre appartient au groupe dont 60 fait partie; c'est le douzième groupe, et comme 63 occupe le troisième rang à partir de 60, son carré contient un nombre

total de dizaines égal au nombre des dizaines du carré de 60 augmenté de 12×3 ou 36. Le carré de 60 comprenant 360 dizaines, on en conclut que le carré de 63 est 3969.

Le procédé que nous venons d'indiquer apporte donc une simplification notable dans la formation du carré d'un nombre de deux chiffres.

Nous devons ajouter que ce procédé est général et permet de former le carré d'un nombre quelconque. La simplification n'est évidemment pas aussi grande que pour un nombre de deux chiffres, mais le fait n'en est pas moins curieux à constater.

Premier exemple : *Carré du nombre* 367. — Ce nombre fait partie du même groupe que 365 (73e groupe). On a $36 \times 37 = 1332$. Le nombre des dizaines du carré de 365 étant 13322, nous aurons $13322 + 73 \times 2$ ou 13468 dizaines au carré de 367. Le carré de ce nombre est donc 134689.

Second exemple : *Carré du nombre* 839. — Ce nombre appartient au même groupe que 840 (168e groupe). Le carré de 840 est 705600; il contient 70560 dizaines. Le carré de 839 en contient donc $70560 - 168$ ou 70392. Donc : $839^2 = 703921$.

SUR LES SURFACES GAUCHES DONT UNE MÊME COURBE PLANE EST A LA FOIS LIGNE DE STRICTION ET LIGNE DE COURBURE;

Par M. E. AMIGUES.

M. Automari s'est demandé incidemment quelles sont les surfaces gauches où une même courbe plane est à

la fois ligne de striction et ligne de courbure. (Thèses soutenues devant la Faculté de Paris, 1894.)

Il donne une propriété générale de ces surfaces, mais il ne donne leurs équations que dans quelques cas simples. Ces équations, dans le cas général, se déduisent aisément de formules que j'ai données dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* en 1889. C'est ce que je me propose d'établir dans cette Note.

Soit une courbe plane quelconque, dont le plan sera pris pour plan des xy. Soit s la longueur d'un axe de cette courbe comptée depuis un point fixe A jusqu'au point variable m dont les coordonnées sont (x, y). ω étant une fonction arbitraire de s, une pareille courbe est représentée par les équations

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} x = \int \cos\omega \, ds, \\ y = \int \sin\omega \, ds, \\ z = 0. \end{cases}$$

Considérons une surface réglée passant par cette courbe, et soient λ, μ, ν les paramètres directeurs de la génératrice, qui passe en m, paramètres qui sont des fonctions de s.

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point P pris sur cette génératrice, de telle sorte que le segment MP soit représenté par u.

La surface réglée est représentée par les équations

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = x + \lambda u, \\ \mathrm{Y} = y + \mu u, \\ \mathrm{Z} = z + \nu u, \end{cases}$$

où les variables sont u et s.

J'ai montré, dans les *Nouvelles Annales,* que, si α représente l'angle de la courbe plane avec la génératrice (angle qui est une fonction arbitraire de s, la condition

nécessaire et suffisante pour que la courbe plane soit ligne de striction est

$$(1) \qquad -\lambda \sin\omega + \mu \cos\omega = -\sin\alpha \frac{d\alpha}{d\omega}$$

et, comme on a évidemment

$$(2) \qquad \lambda \cos\omega + \mu \sin\omega = \cos\alpha,$$

$$(3) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

les paramètres λ, μ, ν se trouvent calculés en fonction de α et ω qui sont deux fonctions arbitraires de s.

Ainsi les équations (B), dans lesquelles x, y, z sont remplacées par leurs valeurs (A) et λ, μ, ν par les valeurs calculées, représentent toutes les surfaces gauches qui ont une ligne plane pour ligne de striction.

Les équations de cette surface contiennent deux fonctions arbitraires de s, savoir ω et α.

Si donc on impose à ces surfaces une autre condition, on trouve une relation entre ω et α, et la solution ne contient plus qu'une seule fonction arbitraire.

En prenant pour seconde condition celle de M. Antomari, on trouve une relation linéaire entre α et ω.

En effet, il est facile de voir que le plan tangent à la surface au point m a pour équation

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z \\ \lambda & \mu & \nu \\ \cos\omega & \sin\omega & 0 \end{vmatrix}.$$

L'angle V qu'il fait avec le plan des x, y doit être constant. On a donc

$$\cos V = \frac{\lambda \sin\omega - \mu \cos\omega}{\pm\sqrt{\nu^2 + (\lambda \sin\omega - \mu \cos\omega)^2}}.$$

Or on a trouvé ci-dessus

$$\lambda \sin\omega - \mu \cos\omega = \sin\alpha \frac{d\alpha}{d\omega},$$

et l'on voit facilement que

$$\lambda^2 + \mu^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)^2;$$

d'où

$$V^2 = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)^2.$$

On a alors

$$\pm\cos V = \frac{d\alpha}{d\omega};$$

d'où

$$\alpha = \pm\omega\cos V + \alpha_0.$$

Il n'y a donc qu'à remplacer α par cette valeur dans les formules publiées par les *Nouvelles Annales* et qui sont les suivantes :

$$X = \int\cos\omega\, ds + \left(\cos\omega\cos\alpha + \sin\omega\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}\right)u,$$

$$Y = \int\sin\omega\, ds - \left(\sin\omega\cos\alpha - \cos\omega\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}\right)u,$$

$$Z = u\sin\alpha\sqrt{1 - \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)^2}.$$

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME RELATIF AUX FONCTIONS SYMÉTRIQUES;

PAR M. E. AMIGUES.

Si le quotient de deux polynomes en a et b est fonction symétrique de a et de b et si, en outre, ces polynomes n'ont aucun diviseur commun en a, ni aucun diviseur commun en b, chacun d'eux est une fonction symétrique de a et de b.

Soient $f(a, b)$ et $\varphi(a, b)$ ces polynomes. On a, par

hypothèse,

$$\frac{f(a,b)}{\varphi(a,b)} = \frac{f(b,a)}{\varphi(b,a)};$$

on peut écrire

$$(1) \qquad \frac{f(a,b)\varphi(b,a)}{\varphi(a,b)} = f(b,a).$$

Le second membre étant un polynome en a, il doit en être de même du premier membre. Ainsi, le polynome en a qui est au dénominateur doit diviser celui qui est au numérateur; mais il est premier avec le facteur $f(a,b)$: il doit donc diviser $\varphi(b,a)$. On a donc

$$(2) \qquad \varphi(b,a) = \mathrm{K}\varphi(a,b),$$

K étant un polynome en a.

En vertu de l'égalité (2), l'égalité (1) devient

$$(3) \qquad f(b,a) = \mathrm{K}f(a,b).$$

Il résulte de là que le polynome en a qu'on appelle K se réduit à une constante, sans quoi $f(b,a)$ et $\varphi(b,a)$ auraient un diviseur commun en a, ce qui revient à dire que $f(a,b)$ et $\varphi(a,b)$ auraient un diviseur commun en b, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Mais, puisque K ne contient pas a, en faisant $a = b$ dans les égalités (2) et (3), K ne changera pas de valeur. On aura ainsi

$$(4) \qquad \varphi(b,b) = \mathrm{K}\varphi(b,b),$$

$$(5) \qquad f(b,b) = \mathrm{K}f(b,b),$$

mais on n'a pas simultanément

$$f(b,b) = 0,$$
$$\varphi(b,b) = 0.$$

Sans quoi les polynomes en a,

$$f(a,b), \qquad \varphi(a,b)$$

auraient un diviseur commun $(a-b)$. Donc, l'une au moins des égalités (4) et (5) donne

$$K = 1,$$

et alors les formules (2) et (3) sont l'expression du théorème à démontrer.

THÉORÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. E. AMIGUES.

Le théorème suivant est quelquefois utile en Algèbre. Il sert notamment à calculer le degré de l'équation finale, quand elle se présente sous la forme du déterminant de M. Sylvester :

Un déterminant dont les éléments sont des lettres avec indices, et où les indices de chaque ligne forment des progressions de même raison, est un polynome dont tous les termes ont même poids.

Prenons pour les éléments une nouvelle notation et représentons par a_{ij} l'élément de ligne i et de colonne j. Le terme principal est alors

$$P = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\ldots a_{n,n}.$$

Dans tout autre terme Q, on peut ranger les éléments dans l'ordre des lignes. On a donc

$$Q = a_{1,1+\alpha}a_{2,2+\beta}a_{3,3+\gamma}\ldots,$$
$$1+\alpha,\quad 1+\beta,\quad 1+\gamma,\quad \ldots$$

représentant dans un certain ordre les entiers de 1 à n. On a donc

$$(1+\alpha)+(2+\beta)+(3+\gamma)+\ldots = 1+2+3+\ldots+n.$$

et par suite

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = 0;$$

ainsi α, β, γ, ... sont des entiers positifs ou négatifs dont la somme est nulle.

Cela dit, pour comparer le poids de P à celui de Q, nous prendrons dans ces produits deux facteurs de même rang

$$a_{r,r}, \quad a_{r,r+\rho}.$$

Ces nombres sont dans la même ligne, mais la colonne du second a pour numéro d'ordre $r + \rho$ et non r. Si donc nous revenons à l'ancienne notation des éléments, et si nous appelons h la raison de la progression arithmétique des indices, l'indice du second élément dépassera de ρh l'indice du premier (ρ et h ayant chacun un signe).

Donc le poids de Q dépassera celui de P, de

$$\Sigma \rho h = h \Sigma \rho = 0.$$

Tous les termes ont donc même poids que le terme principal. Le poids de ce dernier est facile à calculer.

SUR LA QUATRIÈME PARTIE DU PROBLÈME DU DERNIER CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. G. FOURET.

1. Nous nous proposons de montrer ici comment les propriétés les plus élémentaires du complexe linéaire permettent de traiter géométriquement, d'une manière simple, la question que nous avons en vue et dont

l'énoncé, légèrement transformé, est compris dans le suivant :

Étant donnés un point o et quatre droites D, D′, Δ, Δ′ *d'un hyperboloïde, faisant partie d'un même mode de génération, par le point o on mène un plan quelconque; on joint les points où ce plan rencontre* D *et* D′ *et les points où il rencontre* Δ *et* Δ′. *Trouver le lieu du point d'intersection des deux droites obtenues et examiner le cas particulier où le point o est sur l'hyperboloïde.*

2. Parmi les plans qui passent en o, considérons d'abord ceux qui sont tangents à l'hyperboloïde. Un tel plan coupe la surface suivant deux droites, dont l'une G s'appuie à la fois sur D, D′, Δ et Δ′. Tous les points de G satisfont manifestement à la définition du lieu. L'hyperboloïde, considéré comme engendré par G, fait donc partie de ce lieu. Voyons de quelle manière celui-ci se complète.

3. Supposons d'abord que le point o n'appartienne pas à l'hyperboloïde. Imaginons les deux congruences linéaires, ayant pour directrices, l'une D et D′, l'autre Δ et Δ′. Ces quatre droites étant sur un même hyperboloïde, les deux congruences font partie d'un même complexe linéaire, relativement auquel D et D′, Δ et Δ′ forment deux couples de droites conjuguées. Les droites ox et oy qui s'appuient, la première sur D et D′, la seconde sur Δ et Δ′, appartiennent respectivement aux deux congruences. par suite au complexe, et le plan ω qu'elles déterminent a pour pôle, par rapport à ce complexe, le point o.

Par o faisons passer un plan quelconque ϖ, non tangent à l'hyperboloïde. Les droites qui joignent respecti-

vement les points de rencontre de ce plan, d'une part avec D et D′, de l'autre avec Δ et Δ′, font partie du complexe et leur point d'intersection p est le pôle du plan ϖ. Or, le plan ϖ passant par o, son pôle p est dans le plan polaire ω du point o. Le lieu des points tel que p est donc dans le plan ω déterminé par les droites ox et oy.

4. Supposons maintenant le point o sur l'hyperboloïde. Par o passent deux droites sur cette surface, l'une, H, rencontrant à la fois les droites D, D′, Δ et Δ′, l'autre, K, ne les rencontrant pas. La droite H fait partie à la fois des deux congruences linéaires et, par conséquent, du complexe linéaire. Ainsi que nous l'avons démontré tout à l'heure, le lieu du point p est encore le plan polaire ω du point o. Seulement ce plan ω n'est plus, comme dans le premier cas, déterminé par deux droites connues. Nous savons seulement qu'il passe par la droite H. Nous allons faire voir, suivant une remarque déjà faite par M. Laisant, qu'il forme, avec le plan tangent en o à l'hyperboloïde, un couple de plans conjugués, dans une involution dont deux autres couples sont formés, l'un des plans HD et HD′, l'autre des plans HΔ et HΔ′.

A cet effet, considérons, comme c'est ici le cas, un complexe linéaire et un hyperboloïde dont un des systèmes de génératrices soit composé de droites du complexe. Les génératrices de l'autre système forment deux à deux des couples de droites conjuguées par rapport à ce complexe, en raison de ce que les droites d'un complexe linéaire, qui rencontrent une même droite, rencontrent en même temps sa conjuguée. Soient A et A′ deux génératrices de l'hyperboloïde, conjuguées par rapport

au complexe. Dans le faisceau des plans passant par H, les plans tels que HA et HA′ sont liés par une correspondance homographique symétrique. Ce couple variable de plans forme donc une involution, dont font partie les couples de plans HD, HD′ et HΔ, HΔ′.

Soit K′ la seconde droite suivant laquelle le plan polaire ω du point o, qui contient déjà la droite H, coupe l'hyperboloïde. Cette droite est conjuguée de K par rapport au complexe. Par suite, le plan HK′, c'est-à-dire le plan polaire du point o, qui est le lieu du point p, est conjugué du plan HK, c'est-à-dire du plan tangent en o à l'hyperboloïde, dans l'involution déterminée par les deux couples de plans HD, HD′ et HΔ, HΔ′.

Il résulte de là que le plan ϖ, lieu du point p, ne varie pas lorsque l'hyperboloïde se déforme, de manière que le point o et le plan tangent ω en o restent fixes et que les droites D, D′, Δ, Δ′ se déplacent respectivement dans des plans passant par le point o.

5. *Remarque.* — Considérons un hyperboloïde sur lequel les génératrices d'un même système sont *associées* deux à deux, de manière à former des couples de droites conjuguées relativement à un complexe linéaire, comprenant les génératrices de l'autre système. Par un point quelconque de l'espace, faisons passer une suite de droites rencontrant chacune deux génératrices associées de l'hyperboloïde. Ces droites font partie du complexe linéaire et, par suite, sont situées dans un même plan, le plan polaire du point considéré.

De là résulte un moyen simple, applicable d'une infinité de manières, d'associer par couples les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde au moyen d'un plan pris arbitrairement et d'un point choisi à

volonté dans ce plan. Ce mode d'association des génératrices d'un hyperboloïde a été imaginé par Chasles [1], dans une Note qui peut être considérée comme l'origine de l'étude du complexe linéaire et où l'on trouve énoncés, entre autres théorèmes, les deux suivants, dont la démonstration résulte immédiatement de ce qui vient d'être dit, à savoir :

Un plan quelconque coupe les génératrices associées d'un hyperboloïde en une série de couples de points. Les droites, joignant chacune les deux points d'un de ces couples, passent par un même point.

Inversement, si d'un point quelconque on mène une série de droites, s'appuyant chacune sur deux droites associées d'un hyperboloïde, les droites ainsi obtenues sont dans un même plan.

SUR UNE CLASSE DES SURFACES;

PAR M. P. SVÉCHNICOFF.

Supposons qu'une courbe A roule sans glisser sur une autre courbe fixe B, de sorte que leurs plans osculateurs au point commun de contact forment un angle constant δ. Les positions successives d'un point μ invariablement lié à A déterminent une nouvelle courbe C. Quand l'angle δ varie d'une manière continue, la courbe C décrit une surface S. Rapportons cette surface aux axes rectangulaires de coordonnées Ox, Oy, Oz. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point de contact P,

---

(1) *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. IV, p. 378-380; 1839.

x, y, z celles du point μ, PP′ la tangente commune à A et B. Désignons par ρ la longueur μP, par $\mathfrak{I}$ l'angle P′Pμ, par s_1 et σ les arcs des courbes B et A comptés des points quelconques jusqu'à P. Alors, on a $s_1 = \sigma$. On sait que $\cos \mathfrak{I} = \frac{d\rho}{d\sigma}$. D'où l'on a

$$(1) \qquad \cos \mathfrak{I} = \frac{d\rho}{ds_1}.$$

Abaissons la perpendiculaire MQ du point μ sur la droite PP′. Le triangle rectangle μPQ donne

$$\overline{PQ} = \rho \cos \mathfrak{I}, \qquad \overline{\mu Q} = \rho \sin \mathfrak{I}.$$

On a

$$\cos \mathfrak{I} = \frac{x_1 - x}{\rho} \frac{dx_1}{ds_1} + \frac{y_1 - y}{\rho} \frac{dy_1}{ds_1} + \frac{z_1 - z}{\rho} \frac{dz_1}{ds_1}.$$

Ainsi l'on trouve

$$(2) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \rho^2 \ldots.$$

$$(3) \quad (x - x_1) \frac{dx_1}{ds_1} + (y - y_1) \frac{dy_1}{ds_1} + (z - z_1) \frac{dz_1}{ds_1} = -\rho \frac{d\rho}{ds_1}.$$

Telles sont les équations de la surface S. En différentiant l'équation (2) par rapport au paramètre s_1, on a l'équation (3). D'où l'on tire les conséquences suivantes.

1. La surface S est l'enveloppe des sphères représentées par l'équation (2).

2. Quand le paramètre s_1 a une valeur déterminée, la surface S est tangente à la sphère (2) en chaque point de la circonférence représentée par les équations (2) et (3). Cette circonférence a le point Q pour centre et son plan est perpendiculaire à la droite PP′.

3. La normale à la surface S au point μ passe par le point correspondant P de contact des courbes génératrices A et B.

4. La circonférence, représentée par les équations (2) et (3), est une ligne de courbure de la surface S.

5. Le rayon de courbure d'une des sections normales principales de la surface S au point μ est égal à ρ. La normale μP à la surface S au point μ forme avec les axes de coordonnées les angles dont les cosinus sont égaux respectivement à

$$\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \qquad \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Mais ces cosinus sont aussi égaux à

$$\frac{x_1-x}{\rho}, \qquad \frac{y_1-y}{\rho}, \qquad \frac{z_1-z}{\rho}.$$

Ainsi, on a

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1-x+p(z_1-z)=0, \\ y_1-y+q(z_1-z)=0, \\ \rho=(z_1-z)\sqrt{p^2+q^2+1}. \end{cases}$$

En différentiant ces équations, on trouve

$$1+p^2+r(z-z_1)=\frac{ds_1}{dx}\left(\frac{dx_1}{ds_1}-p\frac{dz_1}{ds_1}\right),$$

$$pq+s(z-z_1)=\frac{ds_1}{dy}\left(\frac{dx_1}{ds_1}+p\frac{dz_1}{ds_1}\right),$$

$$1+q^2+t(z-z_1)=\frac{ds_1}{dy}\left(\frac{dy_1}{ds_1}-q\frac{dz_1}{ds_1}\right),$$

$$pq+s(z-z_1)=\frac{ds_1}{dz}\left(\frac{dy_1}{ds_1}-q\frac{dz_1}{ds_1}\right).$$

$$(5) \qquad \begin{cases} [pq+s(z-z_1)]^2 \\ \quad =[1+p^2+r(z-z_1)][1+q^2+t(z-z_1)]. \end{cases}$$

Regardons quelques cas particuliers.

1. Supposons que la longueur $\rho=a$ est constante.

Alors on a

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(pq - \frac{as}{\sqrt{p^2+q^2-1}}\right)^2 \\ &\quad = \left(1+p^2 - \frac{ar}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right) \\ &\qquad \times \left(1+q^2 - \frac{at}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right). \end{aligned}\right.$$

En ce cas S est une surface canal.

La courbe fixe B est l'axe du canal et la courbe A se convertit en un point.

2. Supposons que la courbe B est plane, c'est-à-dire que $z_1 = 0$. Alors on a

$$(7)\qquad (pq+sz)^2 = (1+p^2+rz)(1+q^2+tz).$$

Telle est l'équation différentielle aux dérivées partielles du deuxième ordre de la surface S, si la courbe fixe génératrice est plane.

3. Supposons que la sphère (2) passe toujours par le point O qui est situé dans le plan de la courbe B. Alors on a

$$x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$$

et les équations (4) donnent

$$x_1 = x + pz, \qquad y_1 = y + qz,$$

$$x^2 + y^2 + 2z(px+qy) - z^2(p^2+q^2) = \rho^2$$

ou

$$(8)\qquad x^2 - y^2 - z^2 + 2z(px - qy) = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle est

$$(9)\qquad f\left(\frac{x^2-y^2-z^2}{x}, \frac{x^2+y^2-z^2}{y}\right) = 0.$$

Transformons cette surface par la méthode des sur-

faces inverses. Posons

$$x = \frac{k^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2},$$

$$y = \frac{k^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2},$$

$$z = \frac{k^2 \zeta}{\xi^2 - \eta^2 + \zeta^2}.$$

Alors on a

$$(10) \qquad f\left(\frac{k^2}{\xi}, \frac{k^2}{\eta}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi(\xi, \eta) = 0.$$

D'après cela on peut énoncer le théorème suivant :

La surface inverse par rapport au cylindre enveloppe le système des sphères passant par l'origine.

Il est facile de démontrer que le volume du corps, limité par la surface S et par deux cercles (2) et (3) correspondant à $s_1 = \sigma_0$ et $s_1 = \sigma_1$, est égal à

$$(11) \qquad v = \pi \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \rho^2 \sin^2 \vartheta \left[1 - \left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\sigma^2}\right] d\sigma.$$

Si la courbe B est plane, la grandeur de la partie de la surface S, limitée par deux circonférences (2) et (3) correspondant à $s_1 = \sigma_0$ et $s_1 = \sigma_1$, est égale à

$$(12) \qquad S = 2\pi \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \rho \left[1 - \left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\sigma^2}\right] d\sigma.$$

Les grandeurs de ce volume et de cette surface ne dépendent que de la forme de la courbe mobile A.

Soient

α, β, γ les angles formés par la direction de la tangente PP′ avec les directions positives des axes;

ξ, η, ζ les angles formés par la normale principale de la courbe B avec les mêmes axes;

λ, μ, ν les angles formés également avec les mêmes directions par la direction de l'axe du plan osculateur.

Par le point μ menons le plan perpendiculaire à la droite PP'. Soient QT' et QU' les droites d'intersection de ce plan avec les plans osculateurs des courbes A et B. Abaissons la perpendiculaire μU sur la droite QU' et désignons par φ l'angle μQT'. Alors on a

$$\overline{QU} = \overline{\mu Q}\cos(\varphi + \Im), \qquad \overline{\mu U} = \overline{\mu Q}\sin(\varphi + \Im).$$

D'après cela on trouve

$$\begin{aligned} x &= x_1 - \rho\cos\Im\cos\alpha \\ &\quad + \rho\sin\Im[-\cos(\varphi + \Im)\cos\xi + \sin(\varphi + \Im)\cos\lambda], \\ y &= y_1 - \rho\cos\Im\cos\beta \\ &\quad + \rho\sin\Im[-\cos(\varphi + \Im)\cos\eta + \sin(\varphi + \Im)\cos\mu], \\ z &= z_1 - \rho\cos\Im\cos\gamma \\ &\quad + \rho\sin\Im[-\cos(\varphi + \Im)\cos\zeta + \sin(\varphi + \Im)\cos\nu]. \end{aligned}$$

Ces équations représentent la surface S. x, y, z sont des fonctions des variables s_1 et $\Im$.

ERRATA.

Page 268, ligne 12, *au lieu de* 216000, *lisez* 3240 [1].

---

[1] *Voir* la Note de M. Lucien Lévy, p. 339.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES

[Suite [1]];

PAR M. P. SONDAT.

19. Conique rapportée au triangle de deux de ses tangentes et de la corde des contacts.

Toute conique est représentée par l'équation générale

$$(27)\qquad (P\beta^2 + Q\beta + R)\alpha^2 - (S\beta + T)\alpha + u = 0.$$

Elle coupe les côtés BC, CA, AB aux points λ et λ_1, μ et μ_1, ν et ν_1, racines des équations

$$(28)\qquad \begin{cases} R\lambda^2 + T\lambda - U = 0, \\ P\mu^2 - Q\mu + R = 0, \\ U\nu^2 - S\nu + P = 0. \end{cases}$$

Elle sera donc tangente en A à AC et en B à BC, si l'on a

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad T = 0, \qquad U = 0.$$

Si donc m désigne le rapport S : R, ses équations seront

$$(29)\qquad \alpha + m\beta = 0, \qquad \alpha^2\gamma - m = 0, \qquad m\beta^2\gamma - 1 = 0,$$

et, en coordonnées tangentielles,

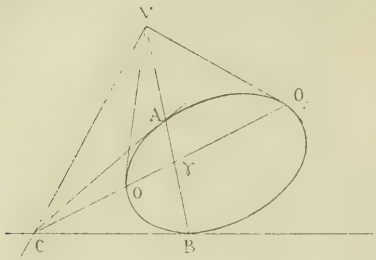
$$(30)\qquad m\mu + 1\lambda = 0, \qquad 1\lambda^2\nu + m = 0, \qquad m\mu^2\nu + 1 = 0.$$

On voit aisément, par ces équations, que toute sécante COO_1 (*fig.* 5), menée par C, coupe la conique en deux points conjugués sur $C\gamma$ et que deux tangentes issues

[1] Voir *Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 369.

d'un point ν de AB, forment avec νA et νC un faisceau harmonique.

Fig. 5.



La courbe est d'ailleurs une parabole si $m = -4$.

20. Théorème. — *Si le point* ω (xyz) *décrit une droite* X$(\lambda\mu\nu)$, *et si l'on mène les droites* $\alpha\mu z$, $x\beta\nu$, $\lambda y\gamma$ *et* $\alpha_1 y\nu$, $\lambda\beta_1 z$, $x\mu\gamma_1$, *les deux points* O$(\alpha\beta\gamma)$ *et* O$_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ *appartiendront à la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon* X, *et la corde* OO$_1$, *polaire de* ω, *enveloppera la conique* Q$_1$ *inscrite selon le pôle* $(-\lambda, -\mu, -\nu)$ *de* X.

On a (1)

$$\frac{\lambda}{x} + \frac{y}{\mu} = 1, \qquad \frac{\mu}{y} + \frac{z}{\nu} = 1, \qquad \frac{\nu}{z} + \frac{x}{\lambda} = 1,$$

et comme

$$\begin{cases} \alpha\mu z = x\beta\nu = \lambda y\gamma = 1, \\ \alpha_1 y\nu = \lambda\beta_1 z = x\mu\gamma_1 = 1, \end{cases}$$

il vient, en remplaçant

$$\frac{\beta}{\mu} + \frac{\nu}{\lambda} = 1, \qquad \frac{\gamma_1}{\nu} + \frac{\lambda}{\alpha_1} = 1.$$

ou (1), O et O$_1$ appartiennent à Q.

Soit X$_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ la corde OO$_1$.

On a

$$\lambda_1 = \frac{\nu x - \lambda z}{\nu z(\mu x - \lambda y)},$$

$$\mu_1 = \frac{\lambda y - \mu x}{\lambda x(\nu y - \mu z)},$$

$$\nu_1 = \frac{\mu z - \nu y}{\mu y(\lambda z - \nu x)},$$

ou, en utilisant les équations de X,

$$\lambda_1 + x = 0, \qquad \mu_1 + y = 0, \qquad \nu_1 + z = 0.$$

Donc X_1 est la polaire de ω (tri. ABC).

On a, d'ailleurs,

$$\frac{-\lambda}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{-\mu} = 1,$$

ou (1) X_1 enveloppe Q_1, et l'on a (6), pour le point de contact,

$$-\frac{x^2}{\lambda}, \quad -\frac{y_2}{\mu}, \quad -\frac{z^2}{\nu}.$$

La même construction, qui donne deux points de Q, donne donc en même temps une tangente de Q_1.

21. Théorème. — *Si la droite* $\rho(xyz)$ *tourne autour du point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *et si l'on détermine les points* $I(\lambda\beta z)$, $H(x\mu\gamma)$, $K(\alpha y\nu)$ *et* $I_1(\lambda_1 y\gamma)$, $H_1(\alpha\mu_1 z)$, $K_1(x\beta\nu_1)$, *les deux droites* $X(\lambda\mu\nu)$ *et* $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ *envelopperont la conique* Q_1 *inscrite à* ABC *selon* O, *et le point* XX_1, *pôle de* ρ, *décrira la conique* Q, *circonscrite selon la polaire* $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ *de* O.

On a (1)

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{y} = 1, \qquad \frac{y}{\beta} + \frac{\gamma}{z} = 1, \qquad \frac{z}{\gamma} + \frac{\alpha}{x} = 1,$$

et comme

$$\begin{cases} \lambda\beta z = x\mu\gamma = \alpha y\nu = -1, \\ \lambda_1 y\gamma = \alpha\mu_1 z = x\beta\nu_1 = -1, \end{cases}$$

il vient, en remplaçant,

$$\frac{\beta}{\mu} - \frac{\nu}{\gamma} = 1, \qquad \frac{\gamma}{\nu_1} + \frac{\lambda_1}{\alpha} = 1.$$

ou (1), X et X_1 enveloppent Q_1.

Soit $O_1(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$ le point XX_1. On a

$$\alpha_1 = \frac{\alpha y - \beta x}{\beta y(\gamma x - \alpha z)},$$

$$\beta_1 = \frac{\beta z - \gamma y}{\gamma z(\alpha y - \beta x)},$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma x - \alpha z}{\alpha x(\beta z - \gamma y)},$$

ou, d'après les équations de O,

$$\alpha_1 + x = 0, \qquad \beta_1 + y = 0, \qquad \gamma_1 + z = 0.$$

Donc O_1 est le pôle de ρ (tri. ABC), et, comme

$$\frac{\alpha_1}{-\alpha} + \frac{-\beta}{\beta_1} = 1,$$

O_1 décrit la conique Q.

On a d'ailleurs (1), pour la tangente en O_1,

$$-\frac{x^2}{\alpha}, \quad -\frac{y^2}{\beta}, \quad -\frac{z^2}{\gamma}.$$

La même construction, qui donne deux tangentes de Q_1 donne donc aussi un point de Q.

22. Théorème. — *On donne une droite* $X(\lambda\mu\nu)$ *et un point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *que l'on joint à un point* $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ *de* X *par la droite* ρ (LMN). *Si l'on prend les conjugués* L_1, M_1, N_1 *de* L, M, N *sur* OO_1, *les droites* AL_1, BM_1, CN_1 *seront concourantes en un point* $\omega(xyz)$, *et ce point* ω *décrira une conique* Q *circonscrite à* ABC *et pour laquelle* O *sera le pôle de* X.

Comme L_1 est le conjugué de L sur OO_1, x sera le

conjugué de L sur $\alpha\alpha_1$. Or, on a

$$L = \frac{\beta - \beta_1}{\beta\beta_1(\gamma - \gamma_1)}.$$

Donc

$$x = \frac{-(\beta - \beta_1)}{\beta\beta_1(\gamma - \gamma_1)}.$$

On trouve de même

$$y = \frac{-(\gamma - \gamma_1)}{\gamma\gamma_1(\alpha - \alpha_1)}, \qquad z = \frac{-(\alpha - \alpha_1)}{\alpha\alpha_1(\beta - \beta_1)}.$$

On a ainsi le point $\omega(xyz)$, et les relations donnent

$$\alpha_1 = \frac{\alpha(\alpha\beta - xy - \alpha y)}{\alpha\beta - xy - \alpha y},$$

$$\beta_1 = \frac{\beta(\alpha y + xy - \alpha\beta)}{xy - \alpha y - \alpha\beta},$$

$$\gamma_1 = \frac{-\gamma(\alpha\beta - xy - \alpha y)}{\alpha y - xy - \alpha\beta}.$$

Or, le point O_1 étant sur X, on a (1)

$$\frac{\lambda}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\mu} = 1,$$

ou, en remplaçant,

$$x : \frac{\alpha(\lambda\mu + \alpha\beta + \mu\alpha)}{\lambda\mu - \alpha\beta - \mu\alpha} - \frac{\beta(\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta} : y = 1.$$

Donc (1) ω décrit la conique Q circonscrite à ABC selon la droite $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, pour laquelle

$$\lambda_1 = \frac{\alpha(\lambda\mu - \alpha\beta - \mu\alpha)}{\lambda\mu - \alpha\beta + \mu\alpha},$$

$$\mu_1 = \frac{\beta(\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta},$$

$$\nu_1 = \frac{-\gamma(\lambda\mu - \alpha\beta - \mu\alpha)}{\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta}.$$

D'ailleurs, comme on a

$$\lambda = \frac{\mu_1 - \beta}{\mu_1\beta(\gamma - \nu_1)}, \qquad \mu = \frac{\nu_1 - \gamma}{\nu_1\gamma(\alpha - \lambda_1)}, \qquad \nu = \frac{\lambda_1 - \alpha}{\lambda_1\alpha(\beta - \mu_1)},$$

X est la polaire de O (11) par rapport à Q.

Remarque I. — On voit aisément que, si O appartient à X, on a

$$\lambda\lambda_1 = \alpha^2, \qquad \mu\mu_1 = \beta^2, \qquad \nu\nu_1 = \gamma^2,$$

ou (4); X est une tangente en O, et ρ se superpose à X.

Si O était le pôle de X, on aurait

$$\alpha = -\lambda, \qquad \beta = -\mu, \qquad \gamma = -\nu,$$

et

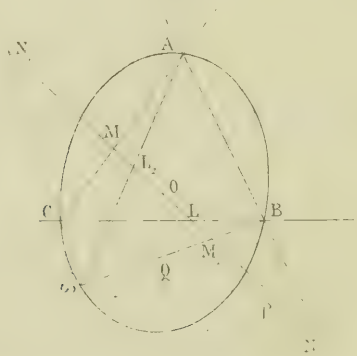
$$\lambda_1 = \lambda, \qquad \mu_1 = \mu, \qquad \nu_1 = \nu,$$

ou X_1 se confondrait avec X.

Remarque II. — Le théorème permet de construire une conique dont on donne trois points A, B, C et le pôle O d'une droite X, ou, en particulier, trois points et le centre O.

Dans ce dernier cas, X passe à l'infini, ainsi que O_1. Si donc on prend (*fig.* 6) sur une droite ρ (LMN), pas-

Fig. 6.



sant par le centre donné O, $OL_1 = -OL$, $OM_1 = -OM$, $ON_1 = -ON$, les droites AL_1, BM_1, CN_1 se couperont en un point ω de la conique.

23. Théorème. — *On donne un point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *et une droite* $X(\lambda\mu\nu)$, *et par* O *on mène une droite* $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, *qui coupe* X *en* ω. *Si par* ω *on mène les rayons* l_1, m_1, n_1, *conjugués des droites* ωA, ωB, ωC *dans l'angle* XX_1, *et coupant les côtés de* ABC *en* x, y, z, *on aura la droite* $\rho(xyz)$, *et cette droite enveloppera une conique* Q_1 *inscrite à* ABC *et pour laquelle* X *sera la polaire de* O.

Si ωA coupe BC en L, ce point sera le conjugué de x sur $\lambda\lambda_1$, et comme

$$L = \frac{\nu_1 - \nu}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)},$$

on aura

$$x = \frac{\nu - \nu_1}{\nu\nu_1(\mu + \mu_1)},$$

et de même

$$y = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda\lambda_1(\nu + \nu_1)}, \qquad z = \frac{\mu + \mu_1}{\mu\mu_1(\lambda + \lambda_1)}.$$

On a donc la droite $\rho(xyz)$, et les relations donnent

$$\lambda_1 = \frac{\lambda(x - \lambda + \lambda\nu xy)}{\lambda - x + \lambda\nu xy},$$

$$\mu_1 = \frac{\mu(\lambda - x + \lambda\nu xy)}{\lambda - x - \lambda\nu xy},$$

$$\nu_1 = \frac{\nu(\lambda + x - \lambda\nu xy)}{x - \lambda + \lambda\nu xy}.$$

Or, puisque X_1 passe par O, on a

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1,$$

ou, en remplaçant

$$\frac{\lambda(\mu\alpha + \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu\alpha + \lambda\mu + \alpha\beta} : x + y : \frac{\mu(\mu\alpha + \lambda\mu + \alpha\beta)}{\mu\alpha - \lambda\mu + \alpha\beta} = 1.$$

Donc (1), ρ enveloppe la conique Q_1 inscrite selon le

point $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, pour lequel

$$\alpha_1 = \frac{\lambda(\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta},$$

$$\beta_1 = \frac{\mu(\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta},$$

$$\gamma_1 = \frac{-\nu(\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta}.$$

D'ailleurs, comme on a

$$\alpha = \frac{\nu - \gamma_1}{\nu\gamma_1(\mu - \beta_1)}, \qquad \beta = \frac{\lambda - \alpha_1}{\lambda\alpha_1(\nu - \gamma_1)}, \qquad \gamma = \frac{\mu - \beta_1}{\mu\beta_1(\lambda - \alpha_1)},$$

O (14) est le pôle de X par rapport à Q_1.

Remarque I. — On voit aisément que si O appartient à X, cette droite est tangente en O, et que si O est le pôle de X (tri. ABC) O_1 se confond avec O.

Remarque II. — Le théorème permet de décrire une conique dont on donne trois tangentes a, b, c et la polaire X d'un point O, ou encore quatre tangentes et le point de contact de l'une d'elles.

24. Théorème. — *Si deux triangles sont circonscrits à* ABC *et homologiques avec lui (axes* X *et* X_1*), les droites qui joignent leurs sommets correspondants forment un triangle* $\alpha\beta\gamma$ *inscrit dans* ABC *et homologique avec lui. Le centre* ω *d'homologie est le quatrième point commun aux coniques* Q *et* Q_1 *circonscrites à* ABC *selon les droites* X *et* X_1, *et l'axe* ρ *d'homologie est la droite qui joint les points* O *et* O_1, *pôles des droites* X *et* X_1 *par rapport à* ABC *et aussi par rapport à ces coniques.*

Coupons ABC par $X(\lambda\mu\nu)$ et $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$. Les droites

$A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$, d'une part, et les droites $A\lambda_1$, $B\mu_1$, $C\nu_1$, d'autre part, forment les triangles HHK et $H_1H_1K_1$ circonscrits à ABC et homologiques, axes X et X_1 et centres $O(-\lambda, -\mu, -\nu)$ et $O_1(-\lambda_1, -\mu_1, -\nu_1)$.

On a

$$\left\{\begin{array}{lll} H_1 : & \dfrac{\mu-\mu_1}{\mu\mu_1(\nu-\nu_1)}, & \dfrac{\nu-\nu_1}{\nu\nu_1(\lambda_1-\lambda)}, \quad \dfrac{\lambda_1-\lambda}{\lambda\lambda_1(\mu-\mu_1)}, \\ HH_1 : & \dfrac{\mu-\mu_1}{\mu\mu_1(\nu_1-\nu)}, & \dfrac{\nu-\nu_1}{\nu\nu_1(\lambda-\lambda_1)}, \quad \dfrac{\lambda_1-\lambda}{\lambda\lambda_1(\mu-\mu_1)}, \\ KK_1 : & \dfrac{\mu-\mu_1}{\mu\mu_1(\nu_1-\nu)}, & \dfrac{\nu-\nu_1}{\nu\nu_1(\lambda_1-\lambda)}, \quad \dfrac{\lambda-\lambda_1}{\lambda\lambda_1(\mu-\mu_1)}. \end{array}\right.$$

Ces valeurs montrent que les droites H_1, HH_1, KK_1 forment un triangle $\alpha\beta\gamma$ inscrit dans ABC et homologique selon le centre $\omega(\alpha\beta\gamma)$,

$$\alpha = \frac{\mu-\mu_1}{\mu\mu_1(\nu_1-\nu)}, \qquad \beta = \frac{\nu-\nu_1}{\nu\nu_1(\lambda_1-\lambda)}, \qquad \gamma = \frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda\lambda_1(\mu-\mu_1)},$$

et selon l'axe $\rho(x, y, z)$,

$$x = -\alpha, \qquad y = -\beta, \qquad z = -\gamma,$$

qui est la polaire de λ.

Or on a

$$\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\beta}{\mu} = 1, \qquad \frac{\alpha}{\lambda_1} - \frac{\beta_1}{\mu} = 1,$$

c'est-à-dire que ω appartient aux deux coniques Q et Q_1 et par suite est leur quatrième point commun.

Les équations précédentes peuvent d'ailleurs s'écrire

$$\frac{x}{-\lambda} + \frac{-y}{\mu} = 1, \qquad \frac{x}{-\lambda_1} \quad \frac{-y_1}{\mu} = 1,$$

ou l'axe ρ passe par

$$O(-\lambda, -\mu, -\nu)$$

et

$$O_1(-\lambda_1, -\mu_1, -\nu_1),$$

pôles des droites X et X_1.

Remarque. — Si l'une des droites X, X_1 est fixe, on pourra décrire sa conique, en déplaçant l'autre droite.

23. Théorème. — *Étant donnés les deux points* $O(\alpha\beta\gamma)$ *et* $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, *si les côtés correspondants des triangles* $\alpha\beta\gamma$ *et* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *se coupent en* A_1, B_1, C_1, *le triangle* $A_1B_1C_1$ *sera circonscrit à* ABC *et homologique avec lui. L'axe* $\rho(\lambda\mu\nu)$ *d'homologie est la quatrième tangente commune aux coniques* Q *et* Q_1, *inscrites à* ABC *selon les points* O *et* O_1, *et le centre* $\omega(xyz)$ *d'homologie est le point de rencontre des droites* $X(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ *et* $X_1(-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1)$, *polaires de* O *et* O_1 *par rapport à* ABC *et aussi par rapport à ces coniques.*

On a

$$\left\{\begin{array}{lll} A_1 : \dfrac{\gamma_1-\gamma}{\gamma\gamma_1(\beta-\beta_1)}, & \dfrac{\alpha-\alpha_1}{\alpha\alpha_1(\gamma-\gamma_1)}, & \dfrac{\beta-\beta_1}{\beta\beta_1(\alpha-\alpha_1)}, \\ B_1 : \dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma\gamma_1(\beta-\beta_1)}, & \dfrac{\alpha_1-\alpha}{\alpha\alpha_1(\gamma-\gamma_1)}, & \dfrac{\beta-\beta_1}{\beta\beta_1(\alpha-\alpha_1)}, \\ C_1 : \dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma\gamma_1(\beta-\beta_1)}, & \dfrac{\alpha-\alpha_1}{\alpha\alpha_1(\gamma-\gamma_1)}, & \dfrac{\beta_1-\beta}{\beta\beta_1(\alpha-\alpha_1)}. \end{array}\right.$$

Ces valeurs montrent que les points (A, B_1, C_1), (A_1, B, C_1), (A_1, B_1, C) sont trois à trois en lignes droites, et que les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes, c'est-à-dire que $A_1B_1C_1$ est circonscrit à ABC et homologique avec lui selon l'axe $\rho(\lambda\mu\nu)$,

$$\lambda = \frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma\gamma_1(\beta-\beta_1)}, \qquad \mu = \frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha\alpha_1(\gamma-\gamma_1)}, \qquad \nu = \frac{\beta-\beta_1}{\beta\beta_1(\alpha-\alpha_1)},$$

et selon le centre $\omega(xyz)$,

$$x = -\lambda, \qquad y = -\mu, \qquad z = -\nu,$$

qui est le pôle de ρ.

Or on a

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1, \qquad \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_1} = 1,$$

c'est-à-dire que ρ enveloppe Q et Q_1 et par suite est la quatrième tangente commune à ces coniques.

Les équations précédentes peuvent s'écrire

$$\frac{-\alpha}{x} + \frac{y}{-\beta} = 1, \qquad \frac{-\alpha_1}{x} + \frac{y}{-\beta_1} = 1,$$

ou (1) ω appartient à X et à X_1 et par suite est leur point de rencontre.

Remarque. — Si l'un des points O, O_1 est fixe, on pourra construire sa conique en déplaçant l'autre point.

26. Je termine cette Note en résumant les constructions obtenues de la conique Q de cinq points A, B, C, D, E. En prenant ABC pour triangle de référence, si Y et Z sont les polaires des points D et E, la polaire X du point O(YZ) sera la droite suivant laquelle la conique Q sera circonscrite à ABC. Après avoir obtenu, avec la règle, le point O et la droite $X(\lambda\mu\nu)$, on pourra tracer la conique Q :

I. Par le pôle ω d'une droite ρ passant par O;

II. A l'aide d'un point décrivant la droite X(16 ou 20);

III. En déplaçant une droite X_1(24);

IV. En s'aidant du centre de la conique, que l'on obtient en joignant les sommets du triangle des droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ aux milieux des côtés de ABC, et utilisant la remarque II du n° 22.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1895.

PREMIÈRE SESSION.

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy, sur l'axe des x un point A d'abscisse $x = p$, sur l'axe des y un point B d'ordonnée $y = q$. Écrire l'équation générale des coniques passant par le point A, tangentes à l'axe des y en B et admettant, pour diamètre conjugué de Oy, une droite dont le coefficient angulaire est m.

1° Faisant varier m, on cherchera le lieu des centres des hyperboles équilatères qui font partie du faisceau de coniques représentées par l'équation générale et le lieu du point de rencontre du diamètre conjugué de Oy dans ces hyperboles avec leur tangente en A. On distinguera sur ces deux lieux les régions qui répondent à des hyperboles pour lesquelles les points A et B sont sur une même branche, de celles sur lesquelles ces points sont sur des branches différentes.

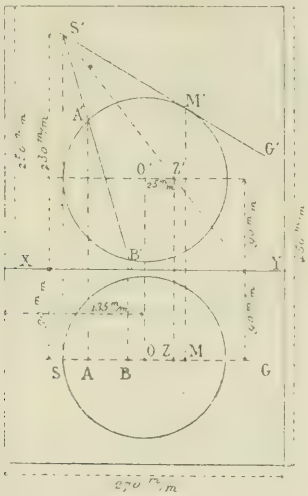
2° Faisant encore varier m et considérant les paraboles qui font partie du faisceau de coniques représentées par l'équation générale, on démontrera que par un point du plan on peut faire passer trois axes de ces paraboles. On considérera les points du plan pour lesquels un des axes est parallèle à Oy et l'on cherchera le lieu des points d'intersection des deux paraboles qui correspondent aux axes non parallèles à Oy.

3° On formera l'équation de la corde commune AC de ces deux paraboles et l'on cherchera le lieu de l'intersection d'une parallèle à cette corde menée par l'origine avec les diamètres conjugués de Oy dans dans ces mêmes paraboles.

Épure.

On considère une sphère de centre O dont la cote et l'éloignement sont fixés à 90^{mm}, le rayon de la sphère $R = 80^{mm}$ et

un cône de révolution dont le sommet (s, s') est ainsi défini : la projetante de ce point se confond avec la tangente commune aux deux contours apparents de la sphère vers la gauche, la projection horizontale de S est située sur le contour apparent de la sphère et la cote de ce point est de 230^{mm} au-dessus du



plan horizontal de projection. L'axe de ce cône est une droite de front $(sz, s'z')$ qui rencontre le diamètre de la sphère parallèle à la ligne de terre en un point (z, z') situé à droite de O et à une distance de 25^{mm}. La génératrice de front $(sg, s'g')$ du cône s'obtient en menant de (s, s') une tangente au grand cercle de front de la sphère dont le contact a lieu en (m, m').

Cela étant, on demande :

1° De déterminer l'intersection du cône et de la sphère. On aura soin de déterminer, outre un point courant et sa tangente, les points et tangentes remarquables ;

2° De représenter le tronc de cône limité par les sections droites des points (a, a') et (b, b') où l'intersection rencontre le contour apparent vertical de la sphère en supprimant de ce tronc de cône la portion comprise dans la sphère.

Titre extérieur : Intersection de deux surfaces.

Titre intérieur : Tronc de cône entaillé par une sphère.

La ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre et à 250^{mm} du petit côté supérieur. La projetante (o, o') est au milieu de la feuille.

Cadre de 0,27 sur 0,45.

Calcul trigonométrique.

1° Calculer les côtés et les angles du triangle ABC dans lequel on connaît la surface S, le rayon r du cercle inscrit et le rayon r' du cercle ex-inscrit situé dans l'angle A,

$$S = 832^{ha},786,$$
$$r = 927^{m},285,$$
$$r' = 1276^{m},175.$$

2° Donner la valeur minimum de la surface S qui correspond aux valeurs numériques données pour r et pour r'.

Physique.

On forme, avec une balance juste, un baroscope.

Soient P et p les poids réels, V et v les volumes des deux sphères à $t°$; la balance étant fermée et pleine d'air sec à la température $t°$ et sous la pression H, l'équilibre existe.

Montrer comment :

1° A température constante l'appareil peut servir de manomètre, puisque la tangente de l'angle d'inclinaison du fléau est proportionnelle à la variation de pression;

2° A pression et à température constantes l'appareil peut servir d'hygromètre; il suffit en effet, pour pouvoir calculer l'état hygrométrique e d'un lieu, d'ouvrir la balance pour donner libre accès à l'air humide et de déterminer les poids π nécessaires pour ramener l'équilibre;

3° Calculer dans ce deuxième cas, l'état hygrométrique e correspondant aux données numériques suivantes :

$$d = \tfrac{5}{8}\,(\text{vap. d'eau}), \qquad V = 1835^{cm^3},2,$$
$$t = 27^{\circ}, \qquad a = 0^{gr},001293;$$
$$\pi = 0^{gr},0253, \qquad v = 3^{cm^3},$$
$$F_t = 26^{mm},5, \qquad d = 0,00366.$$

Chimie.

1° *Préparations des métalloïdes.* – Écrire seulement les formules des réactions.

2° *Problème.* — Dans un ballon analogue à celui de Lavoisier, on chauffe 10^{lit} d'un mélange d'oxygène et d'azote avec 100^{gr} de mercure. On arrête l'expérience quand l'absorption de l'oxygène est terminée (on la suppose complète).

Après refroidissement, on verse un excès d'acide sulfurique concentré; on chauffe jusqu'à dissolution complète et l'on recueille le gaz qui se dégage sur la cuve à mercure; on le mesure et l'on trouve $6^{lit},968$.

On demande :

1° La nature du gaz recueilli;

2° La composition centésimale, en volumes, du mélange d'oxygène et d'azote contenu dans le ballon.

Les gaz seront supposés secs et dans les conditions normales de température et de pression

$\delta = 0,0695$, $H = 1$, $O = 16$, $S = 32$, $Hg = 200$.

SECONDE SESSION.

Géométrie analytique.

Les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, on demande l'équation générale des hyperboles équilatères admettant une asymptote passant par un point fixe B de l'axe des y et dont le coefficient angulaire soit m, telles en outre que le produit des abscisses à l'origine des asymptotes soit constant et que le carré du demi-axe transverse soit $2a^2$.

Faisant varier m et a :

1° Démontrer que les axes de symétrie de ces hyperboles forment un faisceau passant par deux points fixes et prouver géométriquement que le lieu des sommets de celles de ces hyperboles dont les axes transverses sont égaux est un limaçon de Pascal.

2° On considérera les hyperboles du faisceau telles que, l'origine des coordonnées se trouvant avec la courbe dans un même angle des asymptotes, le produit de m et des abscisses à l'origine des asymptotes soit de signe contraire au produit des distances de l'origine aux asymptotes.

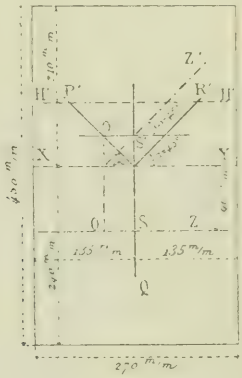
On démontrera que, par un point du plan, on peut mener deux hyperboles de ce système ayant un axe transverse donné.

3° Trouver le lieu Δ des points par lesquels on peut mener deux de ces hyperboles telles qu'une asymptote, passant par B, ait pour coefficient angulaire $+1$, pour l'une, et -1, pour l'autre.

4° On considérera, pour chaque point du lieu Δ, les hyperboles qui répondent, l'une à la valeur maximum, l'autre à la valeur minimum de l'axe transverse; on leur mènera une tangente commune et l'on cherchera le lieu du milieu de la distance des points de contact.

Épure.

Dans le plan de bout $P'\alpha Q$, incliné à 45° sur le plan horizontal, on considère un cercle de 60^{mm} de rayon tangent au plan horizontal; le centre de ce cercle est éloigné de 90^{mm} du



plan vertical. Ce cercle est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la ligne de terre.

On considère d'autre part un cône de révolution dont le

sommet (s, s') est placé sur l'axe de ce cylindre. La projetante de (s, s') se confond avec αQ et l'axe de ce cône est perpendiculaire au plan $P'\alpha Q$.

Le demi-angle ω au sommet du cône est de 45°.

Cela posé, on demande :

1° De déterminer complètement la courbe d'intersection du cylindre avec les deux nappes du cône;

2° De représenter le solide formé par le cône et le cylindre en limitant ce solide aux deux plans de bout symétriques $P'\alpha Q$ et $R'\alpha Q$.

Le cône sera limité à sa partie supérieure par le plan horizontal H' tangent au cylindre suivant la génératrice culminante.

Les deux plans $P'\alpha Q$ et $R'\alpha Q$ ainsi que les surfaces du cône et du cylindre sont opaques; le plan H' horizontal supérieur sera seul considéré comme étant transparent.

Observations. — Dans le tracé à l'encre les portions de la courbe d'intersection du cône et du cylindre, qui sont extérieures aux deux plans $P'\alpha Q$ et $R'\alpha Q$, seront tracées à l'encre bleue.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de la ligne d'intersection ou des sections planes et les tangentes en ces points. Le tracé au net devra faire ressortir les constructions des points ou droites remarquables.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.
Titre intérieur : Cône et cylindre limités par des plans.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre à $0^m,210$ du côté supérieur.

Calcul trigonométrique.

Résoudre le triangle ABC dans lequel on donne les côtés b, c ainsi que l'aire S' du triangle DEF qui a pour côtés les longueurs des médianes du triangle ABC.

On choisira, parmi les solutions qui répondent aux données numériques, celle pour laquelle la hauteur issue du sommet A a la moindre valeur.

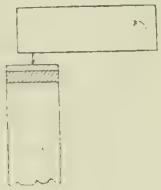
$$S' = 943176^a. \qquad b = 49728^m,7. \qquad c = 67917^m,8.$$

P.-S. — On prouvera que S′ est égal aux trois quarts de la surface S du triangle ABC.

Physique.

Un piston sans frottement, de poids π, de section S^{cmq} repose sur le fond d'un cylindre vertical ouvert à sa partie supérieure dans l'atmosphère.

Dans le fond se trouve une soupape qui met le cylindre en



relation avec une chaudière de capacité V litres qui contient M kilog. d'eau et de vapeur et qui est maintenue à une température constante T à laquelle correspond une pression de vapeur de P kilog. par centimètre carré.

Le cylindre est chauffé à une température T_1 telle que :

1° La pression P_1 kilog. par centimètre carré correspondante soit exactement celle qui est transmise par le piston ;

2° La distance $P - P_1$ soit exactement celle qui est nécessaire pour le fonctionnement de la soupape.

On demande de calculer le déplacement du piston.

Exemple numérique :

$$V = 30^{lit}, \qquad T = 165^\circ, \qquad P = 7^{kg},13,$$
$$M = 1^{kg}, \qquad T_1 = 144^\circ,$$
$$\pi = 10000^{kg}.$$

Rayon du piston

$$R = 31^{cm},13.$$

Densité de la vapeur d'eau

$$d = 0,622.$$

Coefficient de dilatation des gaz

$$\alpha = 0,00367.$$

Chimie.

1° Ozone.

2° *Problème.* — On chauffe 10^{gr} de phosphore avec un excès de sulfure de baryum et d'eau. Les gaz dégagés sont reçus dans une dissolution préparée en attaquant 100^{gr} d'argent pur par l'acide azotique, étendant d'eau et ajoutant un excès d'ammoniaque.

On demande :

1° La nature du précipité qui se forme;

2° Le poids d'argent dissous restant dans la liqueur ammoniacale.

$H = 1$, $O = 16$, $S = 32$, $Az = 15$, $P = 31$,
$Ag = 108$, $Ba = 137$.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME XIV, 3e SÉRIE).

A. — Algèbre; Théorie des équations.

			Pages.
1.	**A3a**	Sur un problème de Géométrie; par M. *Romuald Blazeïevski*	385
2.	**A3aα**	Sur le théorème de d'Alembert; par M. *V. Jamet.*	437
3.	**A3k**	Formule de Cardan modifiée par Cayley, par M. *H. Weber*	347

B. — Déterminants; théorie algébrique des formes; quantités complexes.

4.	**B1a**	Théorème d'Algèbre; par M. *E. Amigues*	496
5.	**B1c**	Sur les déterminants dont les éléments principaux varient en progression arithmétique; par M. *Alfredo Capelli*	62
6.	**B10b**	Note sur les équations en λ de la Géométrie; par M. *L. Sauvage*	369
7.	**B12a**	Sur les exponentielles imaginaires; par M. *G. Tarry*	269
8.	**B12a**	Remarque sur la valeur de i^i; par M. *Wladimir Varicak*	258
9.	**B12c**	Sur l'emploi de la multiplication extérieure en Algèbre; par M. *H. Fehr*	74

F. — Fonctions elliptiques.

10.	**F2g**	Note éclaircissant la définition des fonctions elliptiques, d'après G.-H. Halphen; par M. *Wladimir Varicak*	14

H. — Équations différentielles; suites récurrentes.

11.	**H12d**	Des conditions pour que l'échelle d'une suite récurrente soit irréductible; par M. *Ed. Maillet*	152 et 197
12.	**H12d**	Sur le problème de l'interpolation dans les suites récurrentes; par M. *Ed. Maillet*	473

I. — Arithmétique et théorie des nombres.

Pages.

13. **I1** Note sur la formation des carrés des nombres; par M. *J. Pichot* 489

14. **I2a** Théorie générale du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun des nombres commensurables; par M. *P. Barrieu* ..... 95, 165 et 214

15. **I23a** Sur les réduites des fractions continues symétriques; par M. *G. Musso* 70

J. — Calcul des probabilités.

16. **J2e** Sur la combinaison des écarts; par M. *M. d'Ocagne* 133

K. — Géométrie et Trigonométrie élémentaires.

17. **K1bα** Sur un problème de Géométrie plane; par M. *Romuald Blazeïevski* ..... 49, 385 et 442

18. **K9a** Sur le théorème de Carnot; par M. *André Cazamian* 30

19. **K9a** Théorèmes sur les transversales; par M. le Professeur *Francesco Ferrari* 41

20. **K13a** Une nouvelle définition du plan; par M. *E. Ballue*. 56

21. **K20b** Sur une application de la formule de multiplication des arcs; par M. *E. Goursat* 425

L'. — Coniques.

22. **L'1c** (*Voir* n° 19).

23. **L'6a** Sur le rayon de courbure des coniques; par M. *André Cazamian* 365

24. **L'7** Les propriétés focales des coniques obtenues au moyen de la méthode des polaires réciproques; par M. *Maurice d'Ocagne* 353

25. **L'14a** Sur quelques propriétés des coniques; par M. *P. Sondat* ..... 309 et 507

26. **L'15f** Problème du concours général de 1894; par M. *Raymond Sée* 274

Pages.

27. **L¹17a** Note de Géométrie; par M. *G. Leinekugel*..... 173
28. **L¹17e** Généralisation et solution de la question proposée au concours d'admission à l'École Normale en 1889; par M. *G. Leinekugel*..... 146
29. **L¹18b** Étude sur un faisceau de coniques; par M. *Meyer*. 291
30. **L¹18d** Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École Normale supérieure, en 1894; par M. *J. Lemaire*..... 63
31. **L¹18d** Solution géométrique de la question proposée au concours d'admission à l'École Centrale en 1889; par M. *G. Leinekugel*..... 112
32. **L¹18dβ** Solution de la question de Mathématiques spéciales, proposée au concours d'Agrégation en 1894; par M. *J. Lemaire*..... 280

L². — Quadriques.

33. **L²7a** Sur la composition d'admission à l'École Polytechnique; par M. *Lucien Lévy*..... 329
34. **L²7a** Sur la quatrième partie du problème d'admission à l'École Polytechnique; par M. *G. Fouret*. 498

M¹. — Courbes planes algébriques.

35. **M¹1a** Démonstration algébrique d'un théorème relatif à l'intersection de deux courbes; par M. *Amigues*. 447
36. **M¹3dα** *Voir* n° 18.
37. **M¹3dα** *Voir* n° 19.
38. **M¹5a** Sur les cubiques unicursales; par M. *André Cazamian*..... 297
39. **M¹5cα** Sur les applications des propriétés de la strophoïde; par M. *André Cazamian*..... 192
40. **M¹6a** Note sur une méthode nouvelle de transformation et sur les quartiques unicursales; par M. *G. Leinekugel*..... 391

M². — Surfaces algébriques.

41. **M²2dα** *Voir* n° 19.
42. **M²3b** Extrait d'une Lettre de M. Fouret..... 366
43. **M²3b** *Voir* n° 33.
44. **M²3d** *Voir* n° 33.

Pages.

45. **M² 3 d** Solution géométrique complète de la troisième partie du problème d'admission à l'École Polytechnique; par M. *M. d'Ocagne*..... 341

M³. — Courbes gauches algébriques.

46. **M³ 5 d** Sur quelques propriétés des cubiques gauches; par M. *André Cazamian*..... 108

N¹ — Complexes.

47. **N¹ 1 i** Étude géométrique d'un complexe du second ordre; par M. *R. S.*..... 433

O. — Géométrie infinitésimale.

48. **O 2 q α** Sur les podaires successives d'une courbe; par M. le Capitaine *E. Barisien*..... 89, 157, 207, 233 et 463

49. **O 2 q α** Sur le centre de courbure des podaires; par M. *Maurice d'Ocagne*..... 111

50. **O 2 q α** Constructions du centre de courbure d'une podaire; par un *Ancien élève de Mathématiques spéciales*..... 190

51. **O 2 q α** Sur le centre de courbure des podaires; par M. *E.-N. Barisien*..... 471

52. **O 3 g** Extrait d'une Lettre de M. Mannheim..... 349

53. **O 4 d** Note sur l'équation différentielle des surfaces réglées; par M. *D. Sintsof*..... 58

54. **O 4 d β** Sur les surfaces gauches dont une même courbe plane est à la fois ligne de striction et ligne de courbure; par M. *E. Amigues*..... 491

55. **O 5 d** Sur la courbure du contour apparent d'une surface projetée orthogonalement; par M. *M. d'Ocagne*..... 262

56. **O 5 f** Sur le rayon de courbure de la projection d'une courbe; par M. *J. Caron*..... 138

57. **O 6 c** Sur une classe de surfaces; par M. *P. Svechnicoff*. 501

58. **O 6 f** Remarque sur la surface dont tous les points sont des ombilics; par M. *C. Bourlet*..... 10

P. — Transformations géométriques.

59. **P 1 d** *Voir* n° 18.

60. **P 6 f** *Voir* n° 40.

Q. — Géométrie non euclidienne; Géométrie à n dimensions; Géométrie de situation.

			Pages.
61.	Q1b	Démonstration nouvelle des équations fondamentales de la Géométrie de l'espace à courbure constante négative; par M. *B. Kagan*...	20
62.	Q1b	Note sur une formule connue de la Géométrie imaginaire; par M. *B. Kagan*.....	251
63.	Q2	Note de Géométrie; par M. *F. Farjon*.....	101
64.	Q2	Sur la surface de Fresnel; par M. le Dr *Vahlen*.	345
65.	Q4a	Le problème des labyrinthes; par M. *G. Tarry*.	187

R. — Mécanique.

66.	R1b	Sur deux théorèmes classiques de Cinématique; par M. *Émile Picard*.....	177
67.	R1c	(*Voir* n° 66).	
68.	R4a	Formules de la statique d'un corps solide, en axes obliques; par M. *Étienne Pomey*.....	449
69.	R6	Sur la définition des masses et des forces; par M. *Vaschy*.....	5
70.	R6aγ	Sur le théorème de la conservation des aires; par M. *A. de Saint-Germain*.....	184
71.	R8c	Solution du problème de Mécanique proposé au concours d'Agrégation en 1894; par M. *A. de Saint-Germain*.....	406
72.	R8c	Solution du problème de Mécanique rationnelle donné au concours d'Agrégation des Sciences mathématiques en 1895; par M. *P. Rigollet*..	415

T. — Physique mathématique.

73.	T2a	Note relative à la théorie mathématique de l'élasticité; par M. *L. Bossut*.....	141

Mélanges.

74.	Bibliographie.....	80, 175, 304 et 446
75.	Publications récentes.....	87 et 352
76.	Agrégation des Sciences Mathématiques (concours de 1895).	116
77.	Concours d'admission à l'École Navale en 1894.....	121
78.	Concours général de 1894.....	123

Pages.
79. Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1894.. 132
80. Concours pour les bourses de licence en 1894..... 249
81. Concours général de 1895..... 250
82. Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1895.... 264
83. Concours d'admission à l'École Normale supérieure en 1895. 350
84. Concours d'admission à l'École Centrale en 1894..... 518

TABLE DES AUTEURS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

(TOME XIV, 3e SÉRIE).

Amigues, 1, 4, 35, 54.
Ancien élève, 50.
Ballue, 20.
Barisien, 48, 51.
Barrieu, 14.
Blazeïevski, 17.
Bossut, 73.
Bourlet, 58.
Capelli, 5.
Caron, 56.
Cazamian, 18, 22, 23, 36, 38, 39, 46, 59.
Farjon, 63.
Ferrari, 19, 37, 41.
Fouret, 34, 42.
Goursat, 21.
Jamet, 2.
Kagan, 61, 62.
Leinekugel, 27, 28, 31, 40, 60.
Lemaire, 30, 32.
Lévy (Lucien), 33, 43, 44.
Maillet, 11, 12.
Mannheim, 52.
Meyer, 29.
Musso, 15.
Ocagne (d'), 16, 24, 45, 49, 55.
Picard, 66, 67.
Pichot, 13.
Pomey, 68.
Rigollet, 72.
R. S., 47.
Saint-Germain (de), 70, 71.
Sauvage, 6.
Sée, 26.
Sintsof, 53.
Sondat, 25.
Svechnicoff, 57.
Tarry, 7, 65.
Vahlen, 64.
Varicak, 8, 10.
Vaschy, 69.
Weber, 3.

(On a mis à la droite de chaque nom d'auteur les numéros de la Table précédente auxquels il faut se reporter pour trouver les titres des Mémoires et l'indication des pages correspondantes.)

21645 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS quai des Grands-Augustins, 55.

EXERCICES.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1257.

Étant donné dans un plan un pentagone convexe quelconque ABCDE, *chaque système de trois côtés consécutifs forme un triangle. Démontrer que les cinq circonférences circonscrites à ces triangles déterminent par leurs intersections cinq points situés sur une même circonférence.*

SOLUTION

Par M. Paul Terrier.

Cette question a été posée et résolue, il y a bien des années, par M. Auguste Miquel (voir Catalan, *Théorèmes et problèmes*, 5e édition, p. 118, et Salmon, *Géométrie analytique*, p. 341). En voici une solution fort différente.

Soient ABd, BCe, CDa, DEb, EAc les triangles construits dans les conditions énoncées (1); d_1, e_1, a_1, b_1, c_1 les centres des circonférences respectivement circonscrites à ces triangles; b_0, c_0, d_0, e_0, a_0 les points, autres que les sommets du pentagone, où se coupent respectivement les couples de circonférences d_1 et e_1, e_1 et a_1, a_1 et b_1, etc.; soient enfin A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 les centres des circonférences circonscrites aux cinq triangles bAe, cBa, dCb, eDc, aEd, formés par deux côtés consécutifs du pentagone et par le côté opposé au sommet où se coupent les deux premiers côtés.

Les cinq côtés du pentagone, pris quatre à quatre, déterminent cinq quadrilatères complets, dans chacun desquels les quatre côtés, pris trois à trois, déterminent à leur tour quatre triangles. Le quadrilatère cBCD, par exemple, comprend les triangles inscrits aux circonférences B_1, D_1, e_1, a_1, et l'on sait

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

que ces quatre circonférences se coupent au point c_0, déjà déterminé par l'intersection de deux d'entre elles, e_1 et a_1. De même, les circonférences B_1, E_1, a_1, c_1 se coupent au point a_0, et ainsi de suite.

Cela posé, on a successivement, pour les quadrilatères inscriptibles :

$$\begin{aligned} c_0 a_0 e_0 &= c_0 a_0 c - e_0 a_0 c \\ &= 2^{\text{dr}} - c_0 ac - (2^{dr} - e_0 \mathrm{E} c)\,(\text{circonférences } \mathrm{A}_1 \text{ et } c_1) \\ &= 2^{\text{dr}} - c_0 d_0 \mathrm{D} - e_0 d_0 \mathrm{D}\,(\text{circonférences } a_1 \text{ et } d_1) \\ &= 2^{\text{dr}} - c_0 d_0 e_0. \end{aligned}$$

Les angles $c_0 a_0 e_0$, $c_0 d_0 e_0$ étant supplémentaires, il en résulte que les points a_0, c_0, d_0, e_0 sont sur une circonférence O qui, pour les mêmes raisons, contient aussi le point b_0. La proposition est donc démontrée.

On voit de plus que la propriété énoncée appartient, non seulement aux circonférences a_1, b_1, ..., circonscrites aux cinq triangles formés par trois côtés consécutifs du pentagone donné, mais encore *aux cinq circonférences* A_1, B_1, ..., *circonscrites aux triangles formés par trois côtés consécutifs du pentagone étoilé adbec.*

On sait d'ailleurs que le point de commune intersection des quatre circonférences circonscrites aux quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère, pris trois à trois, est le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère et que les centres de ces quatre circonférences sont eux-mêmes sur une cinquième circonférence passant aussi par le foyer (¹). Si nous désignons par α, β, ..., ε les centres des cinq circonférences de cette dernière espèce relatives aux cinq quadrilatères $B_1 E_1 c_1 d_1$, $A_1 C_1 d_1 e_1$, ..., $A_1 D_1 b_1 c_1$, nous arrivons à voir que chacun des points tels que a_0 est le point d'intersection, *non seulement des trois circonférences indiquées dans l'énoncé de la question* 1257 (c_1, d_1 et O), *mais encore de trois autres circonférences* (B_1, E_1, α).

Le même énoncé peut d'ailleurs, d'après ce qui précède, être remplacé par cet autre plus général :

Les cinq paraboles inscrites aux quadrilatères formés

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 111; 1876.

par les côtés d'un pentagone, pris quatre à quatre, ont leurs foyers distribués sur une circonférence.

En se fondant sur les propriétés que nous venons de rappeler, et par la seule considération d'une suite de quadrilatères inscrits dans les diverses circonférences de la figure, on arrive à démontrer cette nouvelle et intéressante proposition :

Les centres des dix circonférences C *circonscrites aux dix triangles formés par les côtés d'un pentagone, pris trois à trois, sont distribués quatre à quatre sur cinq circonférences* C_1, *qui passent respectivement aux foyers des cinq paraboles inscrites aux quadrilatères formés par les côtés du pentagone pris quatre à quatre. Les circonférences* C_1 *ont elles-mêmes leurs centres sur une circonférence* ω *et elles coupent toutes la circonférence* O, *qui contient les foyers des cinq paraboles, en un même point* M, *situé sur la ligne des centres* ωO.

Lorsque deux côtés du pentagone sont parallèles entre eux, on vérifie les particularités suivantes :

Trois des dix circonférences C ont leurs centres à l'infini et se confondent respectivement avec les côtés non parallèles du pentagone. Une quatrième circonférence C (celle qui contient le sommet du pentagone par lequel ne passe aucun des deux côtés parallèles) se confond avec la circonférence O des foyers. Deux des circonférences C_1 ont leurs centres à distance finie et se coupent au point M sur la circonférence O. Les trois autres ont leurs centres à l'infini et se réduisent à trois droites qui partent des sommets du triangle formé par les côtés non parallèles du pentagone et qui concourent au point M. La circonférence ω a son centre à l'infini et se réduit à une droite perpendiculaire sur OM en son milieu.

On déduit immédiatement cette proposition restreinte :

Les côtés d'un triangle T, *pris deux à deux, forment avec deux transversales parallèles quelconques deux groupes de trois triangles inscrits dans des circonférences dont les centres sont les sommets de deux nouveaux triangles t. Les triangles t sont homologiques entre eux et homologiques à* T, *par rapport à un centre* M, *situé sur la circonférence* O *circonscrite à* T ; *ils sont, de plus, respec-*

tivement inscrits dans deux circonférences qui passent par le centre d'homologie M *et par le centre* O.

Le point M est le foyer d'une parabole inscrite au triangle donné et dont l'axe est perpendiculaire à la direction des transversales.

Enfin, lorsque le pentagone a quatre côtés parallèles deux à deux, c'est-à-dire lorsqu'il est formé d'un parallélogramme écorné par une transversale quelconque, on a les résultats suivants :

Quatre des dix circonférences C se confondent respectivement avec les quatre côtés parallèles deux à deux; deux autres avec le cinquième côté isolé du pentagone. Les quatre dernières ont leurs centres à distance finie, et chacune d'elles est tangente à deux des trois autres.

Quatre foyers sur cinq sont alignés sur le côté isolé du pentagone, aux points de contact des quatre circonférences C, deux à deux ; le cinquième foyer, dépendant du sommet du pentagone, opposé au côté isolé est à l'infini, en sorte que le centre de la circonférence O est aussi à l'infini.

La circonférence C_1, relative au dernier sommet considéré, est tout entière à l'infini. Il en est de même du point de commune intersection M et de la circonférence ω tout entière.

Les quatre autres circonférences C_1 ont leurs centres à l'infini et se résolvent en quatre droites qui sont les côtés d'un nouveau parallélogramme ayant même côté isolé que le parallélogramme donné. En opérant sur ce parallélogramme comme sur le précédent, et de même sur les suivants, on obtiendrait une série de pentagones ayant un côté commun, et les quatre autres côtés parallèles entre eux deux à deux. Dans chacun de ces pentagones, l'angle opposé au côté isolé est double de ce qu'il était dans le pentagone précédent et la limite de ces figures pentagonales transformées est le côté isolé commun à toutes.

Quand le pentagone donné est inscrit dans une circonférence π, l'axe radical AB des circonférences π et d_1 et l'axe radical $a_0 b_0$ des circonférences O et d_1 se coupent sur l'axe radical RS des circonférences π et O ; BC et $b_0 c_0$ se coupent pareillement sur RS et ainsi de suite. Donc :

Les côtés d'un pentagone A, *inscrit dans une circonférence, sont coupés respectivement en cinq points d'une*

même droite par les côtés correspondants du pentagone a_0, *qui a pour sommets les foyers des paraboles inscrites aux cinq quadrilatères formés par les côtés du pentagone* A, *pris quatre à quatre.*

Note. — MM. Lez et F. Pisani ont aussi résolu la question.

Question 1266.

Si, par le pôle de l'orthogénide

$$\rho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \sin\left(-\tfrac{1}{3}\omega\right),$$

on mène une droite quelconque, les tangentes aux points d'intersection de cette droite avec l'orthogénide forment un triangle équilatéral. Trouver le lieu du centre de ce triangle et l'enveloppe du cercle circonscrit, lorsque la droite oscille autour du pôle. (E. Lucas.)

SOLUTION.

Par M. E. Fauquembergue.

La courbe, représentée par l'équation ci-dessus, est la caustique par réflexion de la parabole, pour des rayons incidents perpendiculaires à l'axe. MM. Barbier et Lucas en ont fait une étude détaillée dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. V, p. 27 et suiv.).

Elle rentre dans une famille de courbes remarquables dont l'équation est

$$\rho^n = \mathrm{A} \sin n\omega.$$

M. Haton de la Goupillière, qui a proposé de leur donner le nom de *spirales sinusoïdes,* a résumé les nombreuses propriétés de ces courbes dans un intéressant article, inséré dans ce même Recueil (2e série, t. XV, p. 97 et suiv.).

Nous rappellerons les deux suivantes :

1° L'angle de la tangente avec le rayon vecteur est égal à n fois l'inclinaison de ce dernier sur l'axe polaire;

2° L'angle des tangentes menées aux extrémités de deux rayons vecteurs quelconques est égal à $(n+1)$ fois celui de ces rayons.

On déduit immédiatement de là que, dans l'orthogénide, les tangentes aux trois intersections par un même rayon focal forment toujours un triangle équilatéral.

La première de ces propriétés donne un moyen rapide d'écrire les équations des trois tangentes. On peut aussi employer l'équation générale de la tangente à la courbe dont l'équation est mise sous la forme $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$, savoir :

$$\frac{1}{\rho} = f(\omega)\cos(\Omega - \omega) + f'(\omega)\sin(\Omega - \omega).$$

On observera que, pour une même valeur de l'angle polaire, les trois valeurs de $\frac{1}{\rho}$ sont

$$-\frac{1}{a}\sin^3\frac{\omega}{3}, \quad -\frac{1}{a}\sin^3\left(\frac{\omega}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad -\frac{1}{a}\sin^3\left(\frac{\omega}{3} + \frac{4\pi}{3}\right).$$

En prenant pour axe des X l'axe polaire, on trouvera aisément, d'après les remarques précédentes, que les équations des trois tangentes sont :

$$L_K \equiv X\sin 2(\varphi + K\alpha) - Y\cos 2(\varphi + K\alpha) - a\,\text{cosec}^2(\varphi + K\alpha) = 0,$$
$$(K = 0, 1, 2),$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{\omega}{3} = \varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{3} = \alpha.$$

Si l'on ne cherchait que le lieu du centre du triangle, le procédé le plus simple serait, peut-être, d'éliminer φ entre les équations de deux bissectrices

$$L_3 - L_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad L_3 - L_2 = 0.$$

Mais, comme nous aurons besoin de l'équation du cercle circonscrit, nous allons la former.

Le triangle étant équilatéral, l'équation générale du cercle circonscrit se simplifie et devient

$$U \equiv L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1 = 0.$$

En vertu de l'identité

$$(\Sigma L_1)^2 = \Sigma L_1^2 + 2\Sigma L_1 L_2,$$

on peut remplacer l'équation précédente par celle-ci :

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 - (L_1 + L_2 + L_3)^2 = 0.$$

Les calculs sont alors plus symétriques. Ils sont suffisamment simples, parce que l'on a à opérer sur des lignes trigonométriques d'angles en progression arithmétique.

Toutes réductions [1] faites, on trouve, pour l'équation du cercle,

$$X^2 + Y^2 - 8aX\cot\omega + 4aY(3\cot^2\omega + 1) - 32a^2\operatorname{cosec}^2\omega = 0,$$

ou, en désignant $\cot\omega$ par λ et ordonnant,

$$(1)\quad 4a(3Y - 8a)\lambda^2 - 8aX\lambda + X^2 + (Y + 8a)(Y - 4a) = 0.$$

Les équations du centre sont

$$X = 4a\lambda \qquad \text{et} \qquad Y = -2a(3\lambda^2 + 1).$$

L'élimination de λ donne

$$X^2 = -\frac{8a}{3}(Y + 2a).$$

Le lieu du centre est donc une parabole dont l'axe se confond avec l'axe des Y.

Le paramètre variable λ, entrant au second degré dans l'équation (1), on aura l'enveloppe du cercle en écrivant que l'équation a ses deux racines égales.

L'équation que l'on obtient ainsi peut se mettre sous la forme

$$(Y - 4a)(3X^2 + 3Y^2 + 16aY - 64a^2) = 0.$$

Elle se décompose en deux autres,

$$Y = 4a$$

---

[1] Les simplifications résultent des relations suivantes, qui sont des conséquences de formules connues :

$$\sum_{k=0}^{k=2} \sin 2(\varphi + k\alpha) = \sum_{k=0}^{k=2} \cos 2(\varphi + k\alpha) = 0;$$

$$\sum_{k=0}^{k=2} \sin^2 2(\varphi + k\alpha) = \sum_{k=0}^{k=2} \cos^2 2(\varphi + k\alpha) = \frac{3}{2};$$

$$\sum_{k=0}^{k=2} \cot(\varphi + k\alpha) = 3\cot 3\varphi; \qquad \sum_{k=0}^{k=2} \cot^2(\varphi + k\alpha) = 9\cot^2 3\varphi + 6;$$

$$4\sin\varphi\sin(\varphi + \alpha)\sin(\varphi + 2\alpha) = \sin 3\varphi.$$

et

$$3(X^2+Y^2)+16aY-64a^2=0,$$

ou

$$X^2+\left(Y+\frac{8a}{3}\right)^2=\left(\frac{16a}{3}\right)^2.$$

Le cercle variable reste donc constamment tangent à la droite $y=4a$, parallèle à l'axe des X et à un cercle ayant son centre sur l'axe des Y.

Nota. — M. Moret-Blanc a aussi résolu la question.

Question 1267.

On donne une circonférence dont le centre est O, *et une droite* α. *On a, sur cette droite, deux divisions homographiques, dont* A *et* A′ *sont deux points correspondants. Par* A *et* A′ *on mène des tangentes à la circonférence; elles se coupent en quatre points dont on demande le lieu géométrique.*

Construire la courbe dans le cas particulier où le pied de la perpendiculaire abaissée du point O *sur la droite* α *est le point milieu des deux point doubles imaginaires des divisions homographiques. Cas particulier où les divisions sont en involution et ont leurs points doubles imaginaires.*

(Ed. Dewulf.)

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Soit D une droite quelconque. A chaque point A correspond un point A′, deux tangentes issues de A, qui coupent la droite D en deux points m_1, m_2, et deux droites issues de A′, qui la coupent aux points n_1, n_2.

En vertu du principe de correspondance, il y aura sur la droite D quatre points de coïncidence d'un point m avec un point n, et, par conséquent, quatre points du lieu; ce lieu est donc une courbe du quatrième ordre.

Si les divisions sont en involution, un point de coïncidence se reproduira quand on permutera A et A′ : les quatre points de coïncidence se réduiront à deux, et le lieu sera une conique.

Soit OC la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite α. Si C est le point milieu des deux points doubles imaginaires

des divisions homographiques, C′ le point de la seconde division qui correspond au point C de la première et I le point de la première qui correspond à l'infini de la seconde, on sait qu'il existe sur OC, de part et d'autre du point C, un point P tel que

$$CP = \sqrt{CI.CC'},$$

d'où l'on voit chaque segment AA′ sous un angle constant. Soit

$$CA.CA' + a(CA - CA') + c^2 = 0$$

la relation d'homographie, a et c étant des constantes données.

En faisant $CA' = \infty$, on a

$$CI = a,$$

et en faisant $CA = 0$, on a

$$CC' = \frac{c^2}{a},$$

d'où

$$CP = c.$$

Les divisions homographiques seront déterminées par l'angle constant CPC′ tournant autour du point P. On facilitera la construction en décrivant une circonférence du point P comme centre, sur laquelle il suffira de prendre un arc égal à celui qui est intercepté par CPC′ pour avoir les directions de PA et PA′.

On voit que la ligne OC sera un axe de symétrie du lieu cherché, de sorte que chaque couple de points A, A′ donnera huit points du lieu.

On obtiendra les points situés sur l'axe en plaçant l'angle APA′, de manière que PO soit sa bissectrice : on voit qu'il n'y a sur l'axe que deux points réels.

Si, le point C étant le point milieu des deux points doubles imaginaires, les divisions homographiques sont en involution, les segments AA′ seront vus du point P sous un angle droit; le lieu cherché sera une conique dont OC sera un axe de symétrie.

Nota. — La même question a été résolue par M. F. Pisani.

Question 1277.

Soient (C) *et* (C_1) *deux courbes planes qu'une droite mobile rencontre sous des angles constants* μ *et* μ_1. *Pour que ces deux courbes soient semblables, il faut qu'elles soient deux* spirales logarithmiques *semblables par rapport au point asymptotique, et tournées autour de ce point, l'une relativement à l'autre, d'un angle égal à la différence des angles de rencontre* μ *et* μ_1.

Remarquer le cas de deux courbes semblables, mais quelconques, tournées l'une relativement à l'autre d'un certain angle, autour du pôle de similitude.

Point de contact de la droite mobile avec son enveloppe, dans les deux cas. (Édouard Habich.)

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Deux courbes semblables peuvent être considérées comme résultant de deux courbes homothétiques, dont on a fait tourner l'une d'elles d'un certain angle autour du pôle de similitude.

Cela posé, je suppose que le mouvement de la droite soit déterminé par la condition de joindre deux points homologues. Soient m et m_1 deux de ces points et O le pôle de similitude : le triangle mOm_1, ayant un angle constant compris entre deux côtés proportionnels, reste toujours semblable à lui-même, et, par conséquent, la droite mm_1 fait, avec les rayons vecteurs Om, Om_1, des angles constants dont la différence est mOm_1. Si donc cette droite fait avec les tangentes en m et m_1 des angles constants μ et μ_1, l'angle de la tangente avec le rayon vecteur sera aussi constant ; d'ailleurs ces angles sont égaux par suite de la similitude des courbes : donc les courbes sont *deux spirales logarithmiques* semblables, dont l'une a tourné autour du pôle asymptotique commun d'un angle égal à

$$\pm(\mu - \mu_1).$$

Dans le cas de deux courbes semblables, mais quelconques, les angles μ et μ_1 peuvent varier, mais leur différence reste constante et égale à l'angle mOm_1 des rayons vecteurs homologues :

1° Il résulte de ce qui précède que l'enveloppe de la droite

mobile peut être considérée comme celle d'une droite passant par les points m de la première courbe et faisant avec le rayon vecteur Om un angle constant λ. Soit

$$r = f(\theta)$$

l'équation de la courbe lieu du point m. Appelons p la longueur de la perpendiculaire abaissée du pôle sur mm_1 et α l'angle qu'elle fait avec l'axe polaire, ρ et ω les coordonnées polaires d'un point de mm_1. On a

$$\alpha = \theta - \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \theta + \lambda - \frac{\pi}{2},$$

$$p = r \sin\lambda = \rho \cos(\omega - \alpha) = \rho \sin(\theta + \lambda - \omega),$$

ou

$$(1) \qquad \sin\lambda f(\theta) = \rho \sin(\theta + \lambda - \omega) \qquad \text{équat. de } mm_1,$$

et, en différentiant par rapport à θ,

$$(2) \qquad \sin\lambda f(\theta) = \rho \cos(\theta + \lambda - \omega).$$

θ étant connu, ces deux équations déterminent les coordonnées ρ et ω du point de contact de la droite mm_1 avec son enveloppe.

Dans le cas où les courbes semblables sont des spirales logarithmiques, on a

$$r = ae^{m\theta},$$

$$\sin\lambda . ae^{m\theta} = \rho \sin(\theta + \lambda - \omega),$$

$$\sin\lambda . mae^{m\theta} = \rho \cos(\theta + \lambda - \omega),$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}(\theta + \lambda - \omega) = \frac{1}{m} = \operatorname{tang}\nu \qquad (\nu \text{ angle de la spirale}),$$

$$\omega - \theta = \lambda - \nu \qquad (\text{valeur constante}),$$

$$\rho = \sqrt{1 + m^2}\, ae^{m\theta}.$$

Ces deux formules montrent que l'enveloppe est une spirale logarithmique semblable aux proposées.

Question 1287.

Soient A *et* B *les extrémités de deux rayons conjugués variables d'une ellipse; trouver l'enveloppe des cercles décrits sur* AB *comme diamètre.* (BARBARIN.)

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'ellipse, $a\cos\varphi$ et $b\sin\varphi$ les coordonnées du point A, $-a\sin\varphi$ et $b\cos\varphi$ celles du point B.

L'équation de la circonférence décrite sur AB comme diamètre sera

$$\left[x - \frac{a(\cos\varphi - \sin\varphi)}{2}\right]^2 - \left[y - \frac{b(\cos\varphi + \sin\varphi)}{2}\right]^2$$
$$\frac{a^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2}{4} + \frac{b^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}{4},$$

ou, en développant et réduisant,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 - (ax + by)\cos\varphi + (ax - by)\sin\varphi \\ & = (a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned} \right.$$

On obtiendra l'équation de l'enveloppe en éliminant l'angle φ entre cette équation et sa dérivée par rapport à φ,

$$(2) \quad (ax - by)\sin\varphi + (ax - by)\cos\varphi = c^2(1 - 2\sin^2\varphi),$$

au moyen de la relation

$$(3) \qquad \sin^2\varphi - \cos^2\varphi = 1.$$

Si l'on tire de l'équation (1) la valeur de $\cos\varphi$ pour la reporter dans les équations (2) et (3), il vient, après une première réduction,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2c^4\sin^3\varphi + 3c^2(ax + by)\sin^2\varphi + 2(a^2x^2 + b^2y^2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - c^4 \end{array} \left| \begin{array}{l} \sin\varphi + (x^2 + y^2)(ax - by) \\ \qquad\qquad - c^2(ax + by) \end{array} \right| = 0,\right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} c^2(ax + by)\sin^2\varphi + 2(a^2x^2 + b^2y^2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - c^4 \end{array} \left| \begin{array}{l} \sin^2\varphi + 3(x^2 + y^2)(ax - by) \\ \qquad\qquad - 3c^2(ax + by) \end{array} \right| \begin{array}{l} \sin\varphi + 2(x^2 + y^2)^2 \\ \qquad\qquad - 2(ax + by)^2 \end{array} \right| = 0.$$

Si, pour abréger l'écriture, on représente ces équations par

$$A\sin^3\varphi + B\sin^2\varphi + C\sin\varphi + D = 0,$$
$$A'\sin^3\varphi + B'\sin^2\varphi + C'\sin\varphi + D' = 0.$$

l'équation résultante, mise sous forme de déterminant, sera

$$\begin{vmatrix} AB'-BA' & AC'-CA' & AD'-DA' \\ AC'-CA' & (BC'-CB')+(AD'-DA') & BD'-DB' \\ AD'-DA' & BD'-DB' & CD'-DC' \end{vmatrix} = 0,$$

équation du douzième degré.

Question 1309.

On donne deux coniques A, B *et un point* S *dans un plan. Par ce dernier on tire une droite quelconque et l'on prend son pôle a par rapport à la conique* A. *On joint* Sa *et l'on prend son pôle b par rapport à* B; *on tire* Sb *et l'on prend son pôle* a_1 *par rapport à* A, *et ainsi de suite indéfiniment.*

Démontrer que :

1° *Quatre droites consécutives quelconques des faisceaux* S, a, a_1, a_2, ... *et* S, b, b_1, b_2, ... *ont des rapports anharmoniques constants;*

2° *Donner l'expression d'un de ces rapports;*

3° *Si ce procédé est épuisé à la cinquième ligne, en d'autres termes, si* Sb_1 *coïncide avec la première ligne arbitraire issue de* S, *les quatre tangentes menées par* S *aux deux coniques forment un faisceau harmonique.*

C. DE POLIGNAC.

SOLUTION

Par M. CAMILLE DE POLIGNAC.

Soient

e, e' les points de contact des tangentes à la conique A par le point S;

f, f' les points où les tangentes à B par S rencontrent ee';

β le point de rencontre de Sb avec la même ligne. (b, pôle de Sa, d'après l'énoncé, a et a_1 sont situés sur ee'.)

Comptons toutes les distances à partir de O, point milieu de ee', et posons, pour abréger,

$$\overline{Oa}=x, \quad \overline{Oa_1}=x_1, \quad \overline{O\beta}=\beta, \quad \overline{Oe}=e, \quad \overline{Of}=f, \quad \ldots$$

Désignant par des parenthèses le rapport anharmonique,

on a

$$(1) \qquad (\alpha\beta ff') = -1,$$

$$(2) \qquad (\beta a_1 ee') = -1.$$

On tire de (1)

$$\frac{2}{\beta - x} = \frac{1}{f - x} + \frac{1}{f' - x},$$

ou réduisant

$$2\beta x - (f + f')(x - \beta) + 2ff' = 0.$$

Posant

$$f + f' = p, \qquad ff' = q^2,$$

$$(2x - p)\beta = px - 2q^2,$$

on tire de (2)

$$x_1\beta = e^2.$$

Éliminant β entre les deux dernières équations, il vient

$$(3) \qquad \begin{cases} (2x - p)e^2 = (px - 2q^2)x_1 \\ \quad \text{ou} \\ pxx_1 - 2e^2x - 2q^2x_1 + pe^2 = 0. \end{cases}$$

Cette dernière relation est une relation homographique entre deux points consécutifs de la série a, a_1, a_2, ... Donc, le rapport anharmonique de quatre quelconques de ces points, soit x, x_1, x_2, x_3, est égal au rapport anharmonique des quatre conjugués

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4;$$

en d'autres termes, le rapport anharmonique de quatre points consécutifs a, a_1, a_2, a_3 est constant. Ce qui démontre la première proposition de l'énoncé.

Passons à la troisième :

Écrivons l'équation (3) plus généralement

$$(4) \qquad pxx' - 2e^2x - 2q^2x' + pe^2 = 0.$$

Si la construction est épuisée à la cinquième ligne, le point a_2 coïncide avec a, c'est-à-dire que $x_2 = x$. Donc, si, dans (4), on remplace x par x_1, on en tirera $x' = x$. Autrement

$$p\ {}_1x - 2e^2x_1 - 2q^2x + pe^2 = 0.$$

Comparant avec (3), on voit que l'équation (4) exprime l'involution, d'où il résulte immédiatement

$$e^2 = q^2, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad e^2 = ff';$$

en d'autres termes, les quatre tangentes issues de S forment un faisceau harmonique.

Rapport anharmonique de quatre points consécutifs. — L'équation (3) peut s'écrire plus généralement

$$axx_1 - bx - cx_1 + d = 0, \qquad x_1 = \frac{bx - d}{ax - c},$$

ou, introduisant une variable symbolique y,

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = bx - dy, & x_2 = bx_1 - dy_1, & \ldots, \\ y_1 = ax - cy, & y_2 = ax_1 - cy_1, & \ldots. \end{cases}$$

Le rapport anharmonique à exprimer sera

$$\frac{(xy_1)(x_2y_3)}{(xy_2)(x_1y_3)},$$

où les parenthèses représentent des déterminants.

On tire des équations (4)

$$(xy_1) = ax^2 - (b + c)xy + dy^2,$$

et l'on en tirerait

$$(xy_2) = (xy_1)(b - c),$$

attendu que (xy_2) s'annule, soit dans le cas où tous les points coïncident $x = x_1 = x_2 = \ldots$, soit si $x_2 = x$, auquel cas l'équation (3) doit être une relation d'involution comme il a été remarqué plus haut; en d'autres termes, $b = c$.

On a donc

$$\frac{(xy_1)}{(xy_2)} = \frac{1}{b - c},$$

et l'on aurait de même

$$\frac{(x_1y_2)}{(x_1x_3)} = \frac{1}{b - c}; \qquad (x_1y_3) = (b - c)(x_1y_2).$$

D'autre part, les équations (4) donnent directement

$$(x_1y_2) = (ad - bc)(xy_1),$$

d'où

$$(x_3y_3) = (ad - bc)(x_1y_2) = (ad - bc)^2(xy_1).$$

Il s'ensuit

$$(x_1y_3) = (b - c)(ad - bc)(xy_1),$$

d'où

$$\frac{(x_2 y_3)}{(x_1 y_3)} = \frac{ad - bc}{b - c}.$$

Par suite, le rapport anharmonique de quatre points consécutifs est

$$\frac{ad - bc}{(b - c)^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{e^2(p^2 - 4q^2)}{2(e^2 - q^2)},$$

d'après l'équation (3).

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1319.

Soient A, B, C, D *et* a, b, c, d, e, f *les aires des faces et les longueurs des arêtes d'un tétraèdre donné;* V *son volume;* M *un point d'une surface du second ordre circonscrite à ce tétraèdre, et telle que le plan tangent à cette surface en chacun des sommets du tétraèdre soit parallèle à la face opposée;* α, β, γ *les demi-axes de la surface;* v, v', v'', v''' *les volumes des tétraèdres ayant respectivement pour bases les faces du tétraèdre donné et pour sommet le point* M : *on a les relations*

$$v^2 + v'^2 + v''^2 + v'''^2 = V^2,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \tfrac{3}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2),$$

$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = \tfrac{9}{16}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2),$$

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \tfrac{243}{64} V^2. \qquad \text{(Genty).}$$

SOLUTION

Par M. A. Leinekugel.

Prenons pour axes les arêtes DA, DB, DC du tétraèdre; soient a, b, c leurs longueurs et d, e, f les longueurs des trois autres arêtes BC, AC et AB.

L'équation générale des surfaces circonscrites au tétraèdre est

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$
$$- Aax - A'by - A''cz = 0.$$

Les plans tangents en A, B, C ont pour équations

$$(x-a)Aa+y(2B''a-A'b)+z(2B'a-A''c)=0,$$
$$x(2B''b-Aa)+(y-b)A'b+z(2Bb-A''c)=0,$$
$$x(2B'c-Aa)+y(2Bc-A'b)+(z-c)A''c=0;$$

d'où, d'après l'énoncé, les six relations

$$2B''a-A'b=0, \qquad 2Bb-A''c=0,$$
$$2B'a-A''c=0, \qquad 2B'c-Aa=0,$$
$$2B''b-Aa=0, \qquad 2Bc-A'b=0.$$

On en déduit

$$B''a=Bc, \qquad B'a=Bb, \qquad B''b=B'c$$

ou

$$\frac{B}{a}=\frac{B'}{b}=\frac{B''}{c}=\lambda,$$

et, en reportant ces valeurs dans les équations précédentes, on obtient

$$A=2\frac{bc}{a}\lambda, \qquad A'=2\frac{ac}{b}\lambda, \qquad A''=2\frac{ab}{c}\lambda.$$

Le plan tangent à l'origine a pour équation

$$Aax+A'by+A''cz=0,$$

ou, en remplaçant Aa, $A'b$ et $A''c$ par leurs valeurs précédentes et divisant par abc,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$$

Cette condition est donc une conséquence des autres et l'on trouve comme surface répondant à la question

$$\frac{bc}{a}x^2+\frac{ac}{b}y^2+\frac{ab}{c}z^2$$
$$+ayz-bxz-cxy-bcx-acy-abz=0.$$

ou, en divisant par abc,

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}+\frac{xy}{ab}-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0.$$

Désignons par v, v', v'', v''' les volumes des tétraèdres MABD,

MADC, MDBC, MABC et soient H le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan des xy, P et p les points où la parallèle menée par le point M à DC rencontre les plans ABC et ABD.

On a

$$v = \frac{1}{6}\,\mathrm{OA}.\mathrm{OB}\sin\mathrm{AOB}.\mathrm{MP}\sin\mathrm{MPH},$$

ou, en désignant par Δ le sinus du trièdre formé par les trois arêtes DA, DB et DC du tétraèdre,

$$v = \frac{1}{6}\,abz\,\Delta.$$

De même

$$v' = \frac{1}{6}\,acy\,\Delta,$$

$$v'' = \frac{1}{6}\,bcx\,\Delta,$$

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6}\,abc\,\Delta$$

et

$$v''' = \frac{1}{6}\,de.\mathrm{M}p.\Delta',$$

en désignant par Δ' le sinus du trièdre formé par les trois arêtes du tétraèdre qui aboutissent au sommet C; si l'on remarque que

$$de\,\Delta' = ab\,\Delta,$$

il vient

$$v''' = \frac{1}{6}\,ab.\mathrm{M}p.\Delta.$$

On a

$$\mathrm{M}p = z - c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = c\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right),$$

par suite

$$v''' = \frac{1}{6}\,abc\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{z} + \frac{z}{c} - 1\right)\Delta.$$

Si l'on remplace v, v', v'', v''', V par ces valeurs dans la relation qu'il s'agit d'établir, et si l'on divise ensuite les deux membres par $\frac{a^2b^2c^2\Delta^2}{36}$, on obtient

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right)^2 = 0,$$

et, en développant, on retrouve l'équation (1) de la surface.

Prenons l'équation de la surface sous cette seconde forme; nous en déduisons, pour déterminer le centre, les trois équa-

tions

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{2z}{c} = 1;$$

d'où, pour les coordonnées du centre,

$$x = \frac{a}{4}, \qquad y = \frac{b}{4}, \qquad z = \frac{c}{4}.$$

Transportons l'origine des coordonnées au centre, l'équation de la surface devient

$$\frac{\left(x + \frac{a}{4}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y + \frac{b}{4}\right)^2}{b^2} - \frac{\left(z + \frac{c}{4}\right)^2}{c^2}$$
$$+ \frac{\left(y + \frac{b}{4}\right)\left(z - \frac{c}{4}\right)}{bc} + \frac{\left(x + \frac{a}{4}\right)\left(z + \frac{c}{4}\right)}{ac}$$
$$- \frac{\left(x + \frac{a}{4}\right)\left(y + \frac{b}{4}\right)}{ab} - \frac{\left(x + \frac{a}{4}\right)}{a} - \frac{\left(y + \frac{b}{4}\right)}{b} - \frac{\left(z + \frac{c}{4}\right)}{c} = 0,$$

ou, en développant et après quelques simplifications,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} = \frac{3}{8}.$$

L'équation d'une sphère concentrique est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2} + \frac{2yz}{\rho^2}\cos\lambda + \frac{2xz}{\rho^2}\cos\mu + \frac{2xy}{\rho^2}\cos\nu = 1;$$

on en déduit, comme on le sait, pour l'équation qui donne les carrés des longueurs des demi-axes de la surface, en posant

$$\frac{3}{8\rho^2} = \frac{1}{R},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{R} & \frac{1}{2ab} - \frac{\cos\nu}{R} & \frac{1}{2ac} - \frac{\cos\mu}{R} \\ \frac{1}{2ab} - \frac{\cos\nu}{R} & \frac{1}{b^2} - \frac{1}{R} & \frac{1}{2bc} - \frac{\cos\lambda}{R} \\ \frac{1}{2ac} - \frac{\cos\mu}{R} & \frac{1}{2bc} - \frac{\cos\lambda}{R} & \frac{1}{c^2} - \frac{1}{R} \end{vmatrix} = 0.$$

ou, en multipliant tous les éléments par R,

$$\begin{vmatrix} \frac{R}{a^2}-1 & \frac{R}{2ab}-\cos\nu & \frac{R}{2ac}-\cos\mu \\ \frac{R}{2ab}-\cos\nu & \frac{R}{b^2}-1 & \frac{R}{2bc}-\cos\lambda \\ \frac{R}{2ac}-\cos\mu & \frac{R}{2bc}-\cos\lambda & \frac{R}{c^2}-1 \end{vmatrix} = 0,$$

et. développant suivant les éléments de la première rangée,

$$\left(\frac{R}{a^2}-1\right)\left(\frac{R}{b^2}-1\right)\left(\frac{R}{c^2}-1\right)-\left(\frac{R}{a^2}-1\right)\left(\frac{R}{2bc}-\cos\lambda\right)^2$$
$$-\left(\frac{R}{b^2}-1\right)\left(\frac{R}{2ac}-\cos\mu\right)^2-\left(\frac{R}{c^2}-1\right)\left(\frac{R}{2ab}-\cos\nu\right)^2$$
$$+2\left(\frac{R}{2bc}-\cos\lambda\right)\left(\frac{R}{2ac}-\cos\mu\right)\left(\frac{R}{2ab}-\cos\nu\right)=0$$

ou

$$\frac{R^3}{a^2b^2c^2}-R^2\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right)+R\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-1$$
$$-\frac{R^3}{4a^2b^2c^2}+\frac{R^2}{4b^2c^2}-\frac{R\cos^2\lambda}{a^2}+\cos^2\lambda+\frac{R^2}{a^2bc}\cos\lambda-\frac{R\cos\lambda}{bc}$$
$$-\frac{R^3}{4a^2b^2c^2}+\frac{R^2}{4a^2c^2}-\frac{R\cos^2\mu}{b^2}+\cos^2\mu+\frac{R^2}{ab^2c}\cos\mu-\frac{R\cos\mu}{ac}$$
$$-\frac{R^3}{4a^2b^2c^2}+\frac{R^2}{4a^2b^2}-\frac{R\cos^2\nu}{c^2}+\cos^2\nu+\frac{R^2}{abc^2}\cos\nu-\frac{R\cos\nu}{ab}$$
$$-\frac{R^3}{4a^2b^2c^2}-\frac{R^2}{2abc}\left(\frac{\cos\lambda}{a}+\frac{\cos\mu}{b}+\frac{\cos\nu}{c}\right)$$
$$+R\left(\frac{\cos\lambda\cos\mu}{ab}+\frac{\cos\mu\cos\nu}{bc}+\frac{\cos\lambda\cos\nu}{ac}\right)-2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu=0.$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{R^3}{2a^2b^2c^2}-\frac{R^2}{2}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{abc}\left(\frac{\cos\lambda}{a}+\frac{\cos\mu}{b}+\frac{\cos\nu}{c}\right)\right]$$
$$-R\left(\frac{\sin^2\lambda}{a^2}+\frac{\sin^2\mu}{b^2}+\frac{\sin^2\nu}{c^2}-\frac{\cos\lambda}{bc}-\frac{\cos\mu}{ac}-\frac{\cos\nu}{ab}\right.$$
$$\left.-\frac{\cos\lambda\cos\mu}{ab}-\frac{\cos\mu\cos\nu}{bc}+\frac{\cos\lambda\cos\nu}{ac}\right)-\Delta^2=0,$$

Δ ayant la même signification que précédemment.

De cette équation on déduit, pour la somme des racines,

$$R_1 + R_2 + R_3 = \tfrac{1}{2}\left[3(a^2 + b^2 + c^2) - 2bc\cos\lambda - 2ac\cos\mu - 2ab\cos\nu\right],$$

ou, comme

$$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\lambda,$$
$$e^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\mu,$$
$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\nu,$$

la relation précédente devient, en remarquant que $R_1 = \frac{8}{3}\alpha^2$, $R_2 = \frac{8}{3}\beta^2$, $R_3 = \frac{8}{3}\gamma^2$,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \tfrac{3}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

On a, pour la somme des produits des racines deux à deux,

$$\begin{aligned} R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3 &= b^2c^2\sin^2\lambda + a^2c^2\sin^2\mu + a^2b^2\sin^2\nu \\ &\quad + b^2c^2\sin^2\lambda + 2a^2bc(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ &\quad + a^2c^2\sin^2\mu + 2b^2ac(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ &\quad + a^2b^2\sin^2\nu + 2c^2ab(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu). \end{aligned}$$

Or on a (Dostor, *Théorie des déterminants*, p. 258)

$$\begin{aligned} 4D^2 = \quad & b^2c^2\sin^2\lambda + 2a^2bc(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ & + a^2c^2\sin^2\mu + 2b^2ac(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ & + a^2b^2\sin^2\nu + 2c^2ab(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu), \end{aligned}$$

et la relation précédente devient

$$R_1R_2 + R_2R_2 + R_1R_3 = 4(A^2 + B^2 + C^2 + D^2),$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2 = \tfrac{9}{16}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2).$$

Le produit des racines est

$$R_1R_2R_3 = 2a^2b^2c^2\Delta^2.$$

Si l'on remarque que

$$a^2b^2c^2\Delta^2 = 36V^2,$$

il vient, en remplaçant,

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \tfrac{243}{64}V^2.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1351.

Deux circonférences et un point A *étant donnés, mener par ce point une sécante telle que la différence des cordes interceptées soit égale à d.*

Indiquer les cas d'impossibilité suivant la position du point A. (Lez.)

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Si, du point A, on mène les tangentes aux deux circonférences, deux de ces tangentes formeront l'angle où doivent être situées les sécantes issues de A qui rencontrent à la fois les deux circonférences. Si les angles formés par les tangentes menées de A à chaque circonférence sont extérieurs l'un à l'autre; en d'autres termes, si le point A se trouve dans l'un des angles formés par les tangentes intérieures communes ne renfermant aucune des circonférences, et hors de l'angle des tangentes extérieures communes, il est évident qu'aucune sécante partant de A ne pourra rencontrer à la fois les deux circonférences, et que, par suite, le problème n'a pas de solution.

Ce cas écarté, déterminons l'angle limite, et menons dans cet angle une sécante ABCB'C', qui rencontre la première circonférence aux points B et C, et la seconde aux points B' et C'; prenons sur cette sécante $CD = CD' = d$, et à partir du point B, $BM = B'C'$.

En faisant varier la sécante, les suites des points D et D' formeront deux branches de courbes, ou une conchoïde du cercle; la suite des points M formera une autre courbe dont les intersections avec les branches de la première étant jointes au point A donneront les sécantes satisfaisant à la question.

Ces deux courbes se construisent rapidement par points et font connaitre le nombre des solutions.

Question 1372.

On donne à un plan P *un mouvement infiniment petit sur lui-même; son centre instantané de rotation* O *et son cercle*

des centres C sont déterminés. Désignons par t la tangente en O *à* C.

Considérons une figure F *dans le plan* P; *le lieu géométrique* φ *des centres de courbure des points de* P', *ainsi que les figures* F' *et* φ', *symétriques respectivement, par rapport à t, des figures* F *et* φ.

La figure F' *est le lieu géométrique des centres de courbure des points de la figure* φ'. (DEWULF.)

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

On sait que le mouvement d'une figure plane dans son plan peut être produit par le roulement d'une courbe liée à la figure mobile sur une courbe du plan fixe, et, quand le mouvement est infiniment petit, les deux courbes peuvent être remplacées par leurs cercles osculateurs au point de contact.

Soient R et R' les rayons de ces deux cercles, qui se touchent en O et y ont pour tangente commune la tangente t au cercle des centres.

Soient

A un point *quelconque* de la figure F,
α le centre de courbure de sa trajectoire,
α' le symétrique de α par rapport à t,
et A' le centre de courbure de la trajectoire du point A'. Les points A, O, α sont en ligne droite, ainsi que les points α', O, A'.

Les deux droites $O\alpha$, $O\alpha'$ sont égales et font avec la tangente t un même angle ω.

Cela posé, on a, par le théorème de Savary,

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{O\alpha} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\frac{1}{\sin\omega},$$

$$\frac{1}{O\alpha'} + \frac{1}{OA'} = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\frac{1}{\sin\omega},$$

d'où

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{O\alpha} = \frac{1}{O\alpha'} + \frac{1}{OA'},$$

et, puisque $O\alpha' = O\alpha$, il en reste $OA' = OA$.

Les droites OA', OA étant égales et également inclinées

sur t, le point A′ est le symétrique du point A par rapport à t; et comme A est un point quelconque de la figure F, le théorème est démontré.

Question 1382.

On donne un triangle et la circonférence qui lui est circonscrite. Tangentiellement en m à cette circonférence, on décrit une conique tangente aux trois côtés du triangle donné. Soit μ le centre de courbure de cette conique correspondant au point m : on demande le lieu du point μ lorsque m décrit la circonférence donnée. (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

Je prends le centre de la circonférence pour origine des coordonnées rectangulaires. Soient R le rayon de cette circonférence, θ l'angle de Om avec l'axe OX, et

$$\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha - R\cos A = 0,$$
$$\beta = x\cos\beta + y\sin\beta - R\cos B = 0,$$
$$\gamma = x\cos\gamma + y\sin\gamma - R\cos C = 0$$

les équations des trois côtés BC, CA, AB du triangle; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les résultats de la substitution des coordonnées du point m à x et y dans les expressions de α, β, γ, de sorte que

$$\alpha_1 = R[\cos(\theta - \alpha) - \cos A],$$
$$\beta_1 = R[\cos(\theta - \beta) - \cos B],$$
$$\gamma_1 = R[\cos(\theta - \gamma) - \cos C].$$

L'équation générale des coniques inscrites au triangle ABC est

$$(1) \qquad \sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0.$$

avec la condition

$$(2) \qquad \sqrt{l\alpha_1} + \sqrt{m\beta_1} + \sqrt{n\gamma_1} = 0,$$

qui exprime que la conique passe par le point m.

Chaque radical doit avoir le même signe dans les deux équations.

Le coefficient angulaire de la tangente en m est

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\frac{\dfrac{\sqrt{l}\cos\alpha}{\sqrt{\alpha_1}} + \dfrac{\sqrt{m}\cos\beta}{\sqrt{\beta_1}} + \dfrac{\sqrt{n}\cos\gamma}{\sqrt{\gamma_1}}}{\dfrac{\sqrt{l}\sin\alpha}{\sqrt{\alpha_1}} + \dfrac{\sqrt{m}\sin\beta}{\sqrt{\beta_1}} + \dfrac{\sqrt{n}\sin\gamma}{\sqrt{\gamma_1}}} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

d'où

$$(3)\qquad \frac{\sqrt{l}\sin(\theta-\alpha)}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{\sqrt{m}\sin(\theta-\beta)}{\sqrt{\beta_1}} + \frac{\sqrt{n}\sin(\theta-\gamma)}{\sqrt{\gamma_1}} = 0.$$

Éliminant $\sqrt{l}$, $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ entre ces trois équations, on a celle de la conique satisfaisant aux conditions du problème,

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\alpha} & \sqrt{\beta} & \sqrt{\gamma} \\ \sqrt{\alpha_1} & \sqrt{\beta_1} & \sqrt{\gamma_1} \\ \dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sqrt{\alpha_1}} & \dfrac{\sin(\theta-\beta)}{\sqrt{\beta_1}} & \dfrac{\sin(\theta-\gamma)}{\sqrt{\gamma_1}} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et multipliant par $\sqrt{\alpha_1\beta_1\gamma_1}$,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{\alpha_1\alpha}[\beta_1\sin(\theta-\gamma)-\gamma_1\sin(\theta-\beta)] \\ &+\sqrt{\beta_1\beta}[\gamma_1\sin(\theta-\alpha)-\alpha_1\sin(\theta-\gamma)] \\ &+\sqrt{\gamma_1\gamma}[\alpha_1\sin(\theta-\beta)-\beta_1\sin(\theta-\alpha)] = 0. \end{aligned}\right.$$

Je suppose, pour fixer les idées, que l'axe Ox soit dirigé de telle sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} \alpha-\beta &= 180^\circ - C, \\ \beta-\gamma &= 180^\circ - A, \\ \gamma-\alpha &= -180^\circ - B, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta) &= \sin C, & \cos(\alpha-\beta) &= -\cos C, \\ \sin(\beta-\gamma) &= \sin A, & \cos(\beta-\gamma) &= -\cos A, \\ \sin(\gamma-\alpha) &= \sin B, & \cos(\gamma-\alpha) &= -\cos B. \end{aligned}$$

Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} L &= \beta_1\sin(\theta-\gamma)-\gamma_1\sin(\theta-\beta) \\ &= R[\sin A - \cos B\sin(\theta-\gamma)+\cos C\sin(\theta-\beta)]. \\ M &= \gamma_1\sin(\theta-\alpha)-\alpha_1\sin(\theta-\gamma) \\ &= R[\sin B - \cos C\sin(\theta-\alpha)+\cos A\sin(\theta-\gamma)]. \\ N &= \alpha_1\sin(\theta-\beta)-\beta_1\sin(\theta-\alpha) \\ &= R[\sin C - \cos A\sin(\theta-\beta)+\cos B\sin(\theta-\alpha)]. \end{aligned}$$

L'équation de la conique sera

$$L\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha} + M\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta} + N\sqrt{\gamma_1}\sqrt{\gamma} = 0.$$

On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{L\sqrt{\alpha_1}\cos\alpha}{\sqrt{\alpha}} + \dfrac{M\sqrt{\beta_1}\cos\beta}{\sqrt{\beta}} + \dfrac{N\sqrt{\gamma_1}\cos\gamma}{\sqrt{\gamma}}}{\dfrac{L\sqrt{\alpha_1}\sin\alpha}{\sqrt{\alpha}} + \dfrac{M\sqrt{\beta_1}\sin\beta}{\sqrt{\beta}} + \dfrac{N\sqrt{\gamma_1}\sin\gamma}{\sqrt{\gamma}}},$$

puis, pour le point m en ayant égard à ce que, en ce point, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\alpha = \alpha_1 \ldots$, et faisant quelques autres réductions,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 = \frac{LMN(\alpha_1\sin A + \beta_1\sin B + \gamma_1\sin C)}{\sin\theta\,\alpha_1\beta_1\gamma_1(L\sin\alpha + M\sin\beta + N\sin\gamma)^2}.$$

Appelant ξ et η les coordonnées du point μ, on a

$$\eta - R\sin\theta = \left(\frac{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right)_1$$

$$= \frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1(L\sin\alpha + M\sin\beta + N\sin\gamma)^2}{LMN\sin\theta(\alpha_1\sin A + \beta_1\sin B + \gamma_1\sin C)},$$

$$\xi - R\cos\theta = -\left(\frac{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$$

$$= \frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1\cos\theta(L\sin\alpha + M\sin\beta + N\sin\gamma)^2}{LMN\sin^2\theta(\alpha_1\sin A + \beta_1\sin B + \gamma_1\sin C)}.$$

Remplaçant η par $\rho\sin\theta$ ou ξ par $\rho\cos\theta$, l'une quelconque des deux équations représentera le lieu en coordonnées polaires,

$$\rho = R + \frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1(L\sin\alpha - M\sin\beta + N\sin\gamma)^2}{LMN\sin^2\theta(\alpha_1\sin A + \beta_1\sin B + \gamma_1\sin C)},$$

où L, M, N, α_1, β_1, γ_1 sont des fonctions de θ définies précédemment.

Lorsque $\theta = 0$, on a

$$L\sin\alpha + M\sin\beta + N\sin\gamma = 0:$$

les valeurs de ξ, η et ρ se présentent sous une forme indéter-

minée : mais on peut réduire les valeurs de ξ, η et ρ précédemment trouvées, et alors l'indétermination disparaît.

On a

$$\begin{aligned} L \sin\alpha - M \sin\beta + N \sin\gamma \\ = R(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C) \sin\theta \\ = 2R \sin A \sin B \sin C \sin\theta, \end{aligned}$$

$$\alpha_1 \sin A + \beta_1 \sin B + \gamma_1 \sin C = -2R \sin A \sin B \sin C,$$

et les expressions trouvées se réduisent à

$$\eta = R \sin\theta - 2R \sin A \sin B \sin C \sin\theta \frac{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1}{LMN},$$

$$\xi = R \cos\theta - 2R \sin A \sin B \sin C \cos\theta \frac{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1}{LMN},$$

$$\rho = R - 2R \sin A \sin B \sin C \frac{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1}{LMN}.$$

Cette dernière équation est celle de la courbe en coordonnées polaires.

Il est à remarquer que, lorsque l'un des facteurs du dénominateur s'annule, deux facteurs du numérateur s'annulent aussi.

Ainsi L s'annule pour $\theta - \gamma = C$ et $\theta - \beta = -B$, valeurs dont l'une annule γ_1 et l'autre β_1, et qui donnent la direction OA. De même M et α_1, γ_1 s'annulent pour la direction OB; N et α_1, β_1 s'annulent pour la direction OC.

Soient A′, B′, C′ les points où OA, OB, OC rencontrent les côtés opposés. Lorsque le point m coïncide avec A, par exemple, la conique est l'ellipse ou l'hyperbole infiniment aplatie dont les sommets sont A et A′; en A le rayon de courbure est nul, et le point μ coïncide avec le point A. De même, lorsque le point m est en B ou en C, le point μ coïncide aussi avec B ou C. On voit d'ailleurs que, si le point m est très voisin de l'un des sommets, il en est de même du point μ.

La courbe lieu des points μ passe donc par les trois sommets du triangle ABC.

Même question.

Extrait d'une lettre de M. Mannheim.

En parcourant l'utile *Recueil de problèmes de Géométrie analytique* de M. Laisant, j'ai vu que la question 1382 que j'ai proposée en 1882 dans les *Nouvelles Annales* n'avait pas été résolue. J'en apporte alors la solution; elle est basée sur

l'emploi de deux formules que j'ai données dans les *Comptes rendus* en 1875. Ces formules conduisent à un théorème dont j'ai voulu provoquer la découverte en proposant la question 1382; on n'a pas trouvé ce théorème. Il était devenu facile à obtenir puisqu'il suffit pour cela d'appliquer aux coniques un intéressant théorème que M. Jamet a fait connaître en 1887 dans les *Annales de l'École Normale* et qui concerne les courbes triangulaires. M. Fouret, dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* pour 1892, a également démontré le théorème de M. Jamet.

Voici ma solution, déjà ancienne comme on voit :

Prenons un quadrilatère convexe a, b, c, e. Soient s le point de rencontre des côtés ae, bc et m un point sur ab. Menons les droites mc, me, on a (1)

$$\frac{1}{ma} + \frac{1}{mb} = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} bmc} + \frac{1}{\operatorname{tang} ame}\right),$$

en appelant ρ le rayon de courbure en m de la conique qui passe par les points s, c, e et qui est tangente en m à ab.

On a aussi (2)

$$\frac{1}{ma} + \frac{1}{mb} = \frac{2}{2\rho'}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} bmc} + \frac{1}{\operatorname{tang} ame}\right),$$

en appelant ρ' le rayon de courbure en m de la conique tangente aux côtés du triangle sce et qui est tangente en m à ab. Il résulte de ces deux relations que $\rho' = 4\rho$, les coniques étant en m tournées de la même manière; on peut donc dire : *Deux coniques sont tangentes en leur point m; l'une passe par les sommets d'un triangle donné, l'autre touche les côtés de ce triangle : le rayon de courbure de celle-ci pour le point m est égal à quatre fois le rayon de courbure de l'autre au même point m* (3).

Ce théorème donne lieu à des cas particuliers. Par exemple,

---

(1) Voir *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 342 et 578.

(2) *Ibid.*, p. 342.

(3) Réciproquement : *Si en un point deux coniques* C_1, C_2, *tangentes et tournées de la même manière, ont leurs rayons de courbure dans le rapport de un à quatre, on peut inscrire à* C_1 *des triangles qui soient circonscrits à* C_2.

si l'on suppose que l'une des coniques soit le cercle circonscrit au triangle donné, ses rayons de courbure sont égaux ; donc les rayons de courbure des coniques tangentes aux côtés de ce triangle et à ce cercle, pour leurs points de contact avec ce cercle, sont aussi égaux; par suite on conclut que :

Le lieu demandé est un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle donné.

On peut ajouter, d'après ce qui précède, que *le rayon de ce cercle est égal à trois fois le rayon du cercle circonscrit.*

Question 1563.

En chacun des points d'un ellipsoïde, on mène le plan tangent. On projette sur ce plan le diamètre issu du point de contact. Démontrer que ces projections, déjà tangentes à l'ellipsoïde, sont tangentes, en outre, à une autre surface. (MANNHEIM.)

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION

Par M. J. FRANEL.

Nous voulons montrer que cette propriété, loin d'être particulière à l'ellipsoïde, est vraie pour une surface quelconque. Soit O un point fixe arbitraire; en chaque point P de la surface considérée on mène le plan tangent et l'on projette le rayon vecteur OP sur ce plan. Je dis que ces projections, déjà tangentes à la surface donnée, sont tangentes, en outre, à une autre surface. Prenons le point fixe O pour origine des coordonnées et soit, par rapport à un système d'axes rectangulaires, $f(x, y, z) = 0$, l'équation de la surface proposée.

Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point P, la projection l' du rayon vecteur OP sur le plan tangent à la surface au point P sera représentée par les équations

$$(1) \qquad (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 = T,$$

$$(2) \qquad LX + MY + NZ = 0 = U,$$

où l'on fait, pour abréger,

$$L = y\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}z, \qquad M = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad N = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Un plan quelconque passant par la droite l' aura une équation de la forme

$$(3) \qquad u + \lambda T = 0.$$

Si l'on prend pour λ une fonction déterminée de x, y, z, ce plan, quand le point P se déplace sur la surface donnée, aura une certaine enveloppe. Proposons-nous de déterminer λ de telle sorte que le point P', où ce plan touche son enveloppe, soit situé sur la droite l'.

Il est évident que le lieu du point P' sera une surface jouissant de la propriété indiquée dans notre énoncé.

Or les coordonnées X, Y, Z du point P' s'obtiennent, comme on sait, en résolvant le système d'équations

$$\begin{gathered} u + \lambda T = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}T = \rho\frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}T = \rho\frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \lambda\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}T = \rho\frac{\partial f}{\partial z}, \end{gathered}$$

où ρ désigne une inconnue auxiliaire. Mais ces coordonnées doivent, par hypothèse, satisfaire aux deux équations

$$u = 0, \qquad T = 0.$$

On aura donc à déterminer λ, de telle sorte que les cinq équations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} u = 0 \qquad T = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial T}{\partial x} = \rho\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u}{y} + \lambda\dfrac{\partial T}{\partial y} = \rho\dfrac{\partial f}{\partial y}, & \dfrac{\partial u}{\partial z} + \lambda\dfrac{\partial T}{\partial z} = \rho\dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$$

admettent une solution commune en X, Y, Z et ρ. L'élimination de ces quatre quantités nous donne la condition cherchée

sous la forme suivante :

$$
0 = \begin{vmatrix}
\frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial M}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & -\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) & \frac{\partial f}{\partial x} \\
\frac{\partial L}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial M}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial N}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & -\lambda \frac{\partial}{\partial y}\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) & \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial L}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial M}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial N}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & -\lambda \frac{\partial}{\partial z}\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) & \frac{\partial f}{\partial z} \\
L & M & N & 0 & 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & -\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) & 0
\end{vmatrix}.
$$

De l'identité

$$Lx + My + Nz = 0,$$

on tire

$$x \frac{\partial L}{\partial x} + y \frac{\partial M}{\partial x} + z \frac{\partial N}{\partial x} = -L,$$

$$x \frac{\partial L}{\partial y} + y \frac{\partial M}{\partial y} + z \frac{\partial N}{\partial y} = -M,$$

$$x \frac{\partial L}{\partial z} + y \frac{\partial M}{\partial z} + z \frac{\partial N}{\partial z} = -N.$$

Si donc on ajoute aux éléments de la quatrième colonne les éléments correspondants des colonnes restantes,

après les avoir multipliés respectivement par x, y, z, λ, il viendra :

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial M}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & L & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial M}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial N}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & M & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial M}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial N}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & N & \frac{\partial f}{\partial z} \\ L & M & N & 0 & \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & 0 & \end{vmatrix},$$

équation du premier degré par rapport à λ. λ étant ainsi déterminé, les cinq équations précédentes seront compatibles : on pourra de quatre d'entre elles tirer les valeurs de X, Y, Z et ρ. En particulier, si la surface donnée est algébrique, on voit que les coordonnées X, Y, Z du point P′ seront des fonctions rationnelles des coordonnées du point P.

Si l'on introduit les deux quantités

$$R = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad S = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$

il viendra

$$L\frac{\partial f}{\partial y} - M\frac{\partial f}{\partial x} = R\frac{\partial f}{\partial z} - zS.$$

$$M\frac{\partial f}{\partial z} - N\frac{\partial f}{\partial y} = R\frac{\partial f}{\partial x} - xS,$$

$$N\frac{\partial f}{\partial x} - L\frac{\partial f}{\partial z} = R\frac{\partial f}{\partial y} - yS,$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$\Delta = L\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y} + N\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \delta = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

on pourra finalement mettre l'équation en λ sous la forme

$$R\left(-\frac{R}{2}\Delta S + S\,\Delta R\right)$$
$$+ \lambda\left\{\frac{R^2}{2}(f, S) - RS\left[\frac{1}{2}\delta S + (f, R)\right] + S^2\,\delta R\right\} = 0.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1686. Résoudre les $2n-1$ équations à $2n-1$ inconnues,

$$\frac{1}{2} = X_1 x_1 + \ldots + X_{n-1} x_{n-1} + X_n,$$

$$\frac{1}{3} = X_1 x_1^2 + \ldots + X_{n-1} x_{n-1}^2 + X_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2n} = X_1 x_1^{2n-1} + \ldots + X_{n-1} x_{n-1}^{2n-1} + X_n,$$

et montrer que les inconnues $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont les racines, autres que zéro et un, de l'équation

$$\frac{\partial^{n-1} \lambda^n (\lambda - 1)^n}{\partial \lambda^{n-1}}.$$

(LUCIEN LÉVY.)

1687. On sait que l'équation

$$\frac{\partial^n x^n (x-1)^n}{\partial x^n} = 0$$

peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots & \frac{1}{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & & \ldots & \frac{1}{2n} \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \end{vmatrix} = 0:$$

démontrer que l'équation

$$\frac{\partial^{n+1} x^n (x-1)^n}{\partial x^{n+1}} = 0$$

peut de même s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2.3} & \frac{1}{3.4} & \dots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{3.4} & \frac{1}{4.5} & \dots & \frac{1}{(n+2)(x+3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \dots & \frac{1}{(2n-1)2n} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

De même l'équation

$$\frac{\partial^{2n-k} x^n (x-1)^n}{\partial x^{2n-k}} = 0$$

peut s'écrire

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)\dots(2n-2k+1)} & \dots & \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(2n-k+1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{n(n+1)\dots(2n-k)} & \dots & \frac{1}{(n+k)(n+k+1)\dots 2n} \\ 1 & x \ \dots & x^k \end{vmatrix}.$$

(Lucien Lévy.)

1688. Étant données les équations simultanées

$$(A) \quad \begin{cases} x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = 0, \\ x\cos\lambda' + y\cos\mu' + z\cos\nu' = 0, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} u\cos\lambda + u'\cos\lambda' = 0, \\ u\cos\mu + u'\cos\mu' = 0, \\ u\cos\nu + u'\cos\nu' = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé $u = m\frac{d\sigma}{dt}$, $u' = m'\frac{d\sigma'}{dt}$; $d\sigma$ et $d\sigma'$ sont les aires des parallélogrammes construits sur r et ds, r' et ds'; ds et ds' sont les différentielles des arcs des trajectoires décrites dans l'espace par les corps m et m' dans le temps dt; enfin, λ, μ, ν, λ', μ', ν' sont les angles des normales aux plans de ces parallélogrammes. On demande de déduire de ces équations les propositions suivantes rencontrées successivement par La-

place [1] et par Jacobi [2] : 1° L'intersection des deux plans (A) est constamment située dans le plan des xy qu'elle décrit ; 2° ce dernier plan est toujours compris entre les deux plans (A). (Escary.)

1689. Conclure des mêmes équations les résultats suivants :

1° $$dt = \frac{m\,d\sigma \sin(\nu - \nu')}{a \sin\nu} = \frac{m'\,d\sigma' \sin(\nu + \nu')}{a \sin\nu}.$$

2° $$a^2 = u^2 - u'^2 + 2uu' \cos(\nu + \nu').$$

3° Le plan des deux normales menées par l'origine aux plans (A) contient l'axe des z.

4° L'équation

$$m\,d\sigma \sin\nu = m'\,d\sigma' \sin\nu',$$

où $m\,d\sigma$ et $m'\,d\sigma'$ sont des moments, exprime que le plan des xy est un lieu géométrique d'axes instantanés de rotation, et que, par suite, ce plan est un cône de Poinsot, lequel est de révolution et a pour cône supplémentaire l'axe des z.

(Escary.)

1690. En désignant par ψ la longitude du plan des deux normales (λ, μ, ν), (λ', μ', ν'), qui pivote autour de l'axe des z, démontrer que l'on a

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi}, \qquad \frac{\cos\lambda'}{\cos\mu'} = \frac{\cos\psi'}{\sin\psi'}, \qquad \frac{\cos\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cos\lambda'}{\cos\mu'}.$$

(Escary.)

1691. Conclure de ces équations $\psi' = \psi - \pi$ (Laplace), et les deux intégrales suivantes

$$\operatorname{tang}^2\theta \cos 2\psi = D^2, \qquad \operatorname{tang}^2\theta' \cos 2\psi' = D'^2,$$

où θ et θ' sont les angles que font les rayons vecteurs r et r' avec l'axe des z, D et D', des constantes arbitraires.

(Escary.)

1692. En posant $\dfrac{\cos\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}} = \sqrt{\dfrac{1 + e^{2\omega}}{2}}$, démontrer les for-

---

[1] *Mécanique céleste*, Livre II, n° 62.

[2] *Comptes rendus*, t. XV, p. 256.

mules suivantes

$$\sin\theta = \cos\nu = \frac{D\,e^{\omega}}{\sqrt{D^2 e^{2\omega}+1}},$$

$$\cos\theta = \sin\nu = \frac{1}{\sqrt{D^2 e^{2\omega}+1}},$$

$$\cos\lambda = \frac{\sqrt{e^{2\omega}+1}}{\sqrt{2}\,e^{\omega}\sqrt{D^2 e^{2\omega}+1}},$$

$$\cos\mu = \frac{\sqrt{e^{2\omega}-1}}{\sqrt{2}\,e^{\omega}\sqrt{D^2 e^{2\omega}+1}},$$

$$d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2 = \frac{D^2 e^{4\omega}(e^{2\omega}+D^2)\,d\omega^2}{(D^2 e^{2\omega}+1)^2(e^{4\omega}-1)} = d\xi^2,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\xi^2,$$

$$d\sigma^2 = r^4\, d\xi^2.$$

(Escary.)

1693. Démontrer que la relation $\frac{\cos\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cos\lambda'}{\cos\mu'}$, déduite des deux premières équations (B), entraîne les suivantes

$$\omega' = \omega,$$

$$dt = \frac{m}{a}\,\frac{(D+D')\,e^{\omega}}{\sqrt{D^2 e^{2\omega}+1}}\,r^2\,d\xi = \frac{m'}{a}\,\frac{(D+D')\,e^{\omega'}}{\sqrt{D'^2 e^{2\omega'}-1}}\,r'^2\,d\xi',$$

$$r'^2 = \frac{m}{m'}\,\frac{D}{D'}\,\frac{D'^2 e^{2\omega}-1}{D^2 e^{2\omega}+1}\,r^2,$$

$$r^2 = \frac{m'}{m}\,\frac{D'}{D}\,\frac{D^2 e^{2\omega'}+1}{D'^2 e^{2\omega'}-1}\,r'^2.$$

$$\cos(\nu-\nu') = \frac{DD'\,e^{2\omega}-1}{\sqrt{(D^2 e^{2\omega}+1)(D'^2 e^{2\omega'}-1)}}.$$

(Escary.)

1694. Démontrer que, dans le cas de $D < D'$, on a l'inégalité double

$$\frac{m'D'}{mD} > \frac{r^2}{r'^2} > \frac{m'D}{mD'};$$

et que si l'on a

$$D > D',$$

la même inégalité a lieu dans un sens opposé.

(Escary.)

1695. Sachant que l'on a

$$r''^2 = r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(v - v'),$$

et en posant

$$D^2 e^{2\omega} + 1 = P, \qquad D'^2 e^{2\omega} - 1 = Q,$$

$$DD'\left(\frac{\sqrt{mD'} - \sqrt{m'D}}{\sqrt{mD} - \sqrt{m'D'}}\right)^2 e^{2\omega} - 1 = S,$$

démontrer les relations suivantes

$$r''^2 - \left(\sqrt{\frac{mD}{m'D}} - 1\right)^2 \frac{S}{P} r^2 = \left(\sqrt{\frac{m'D'}{mD}} + 1\right)^2 \frac{S'}{P'} r'^2,$$

$$d\xi'^2 = \frac{D'^2}{D^2}\,\frac{P^2}{Q^2}\,\frac{e^{2\omega} + D'^2}{e^{2\omega} + D^2}\, d\xi^2,$$

$$d\xi^2 = \frac{D^2}{D'^2}\,\frac{P'}{Q'}\,\frac{e^{2\omega'} - D^2}{e^{2\omega'} + D'^2}\, d\xi'^2.$$

(Escary.)

1696. Le triangle $A_1B_1C_1$ étant inscrit homologiquement dans ABC, si l'on mène par A une droite quelconque rencontrant A_1C_1 en B_2 et A_1B_1 en C_2 :

1° Les droites BC_2 et B_2C se coupent en A_2 sur B_1C_1.

2° Les trois triangles ABC, $A_1B_1C_1$, et $A_2B_2C_2$ sont homologiques deux à deux, ou l'on a

$$(\text{centre } O)\ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_1 \end{vmatrix}\ (\text{axe } X),$$

$$O_1\ \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}\ X_1, \qquad O_2\ \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}\ X_2.$$

3° Les centres O, O_1, O_2 appartiennent respectivement aux axes X_1, X_2, X :

4° Il existe trois coniques :

La première tangente aux côtés de ABC en A_1, B_1, C_1 et à X_1 en O.

La deuxième tangente aux côtés de $A_1B_1C_1$ en A_2, B_2, C_2 et à X_2 en O_1.

La troisième tangente aux côtés de $A_2B_2C_2$ en A, B, C et à X en O_2. (P. Sondat.)

1697. Étant donnés, sur une conique, deux groupes de trois points, a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3, s'il existe une conique inscrite au triangle $a_1a_2a_3$ et circonscrite au triangle $b_1b_2b_3$, il existera une seconde conique inscrite au triangle $b_1b_2b_3$ et circonscrite au triangle $a_1a_2a_3$.

Étant donné un triangle, chaque point d'intersection du cercle circonscrit avec un des cercles inscrits est le foyer d'une parabole circonscrite au triangle. (Humbert.)

1698. On considère le triangle formé par un point M d'une ellipse, le pôle de la normale en M et le centre de l'ellipse.

On considère en outre le rectangle formé par le point M, le cercle de l'ellipse et les projections de ce centre sur la tangente et la normale en M.

Quel que soit le point M sur l'ellipse, le produit des aires du triangle et du rectangle est constant. (E.-N. Barisien.)

1699. On considère le quadrilatère formé par les quatre pieds des normales abaissées sur une ellipse d'un point du plan de cette ellipse. Les centres des quatre cercles ciconscrits (cercles de Joachimsthal) passant par trois des pieds des normales ont pour centre des moyennes distances le point d'émission des normales. (E.-N. Barisien.)

1700. Dans la parabole, le produit des rayons de courbure aux pieds des normales abaissées d'un point sur la parabole, est égal à huit fois le cube de la distance du point d'émission des normales au foyer. (E.-N. Barisien.)

1701. Le lieu géométrique des points milieux des cordes d'un limaçon de Pascal qui sont vues du point double réel sous un angle droit est une circonférence. (A. Droz.)

1702. Soient AB et A'B' deux diamètres d'une hyperbole équilatère et C un point quelconque de cette dernière, les deux triangles AA'C et BB'C sont orthocentriques.

(A. Droz.)

1703. 1° Le lieu des centres des coniques osculatrices à une circonférence donnée en un point donné de cette circonférence, et passant par un autre point donné de la circonférence, est une hyperbole équilatère.

2° Le lieu des foyers des paraboles osculatrices à une cir-

conférence donnée en un point donné de cette circonférence, est un cercle;

3° Le lieu des centres des hyperboles équilatères osculatrices à une circonférence donnée en un point donné de cette circonférence, est un cercle. (E.-N. Barisien.)

1704. 1° Dans tout triangle, on a

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}.$$

Quand l'égalité a lieu, le triangle est équilatéral.

2° Trois nombres positifs *quelconques* a, b, c étant donnés, on a

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)-abc\leq 0;$$

quand l'égalité a lieu, on a

$$a+b=c.$$

1704 bis.

Démontrer que, si un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes, le centre du cercle circonscrit à ce triangle décrit une conique. Examiner en particulier les cas où cette conique est un cercle ou un système de deux droites. (Weill.)

1705. Considérons un système focal donné comme l'ensemble de deux systèmes réciproques, et faisons tourner l'un de ces systèmes d'une demi-révolution autour d'une droite, assujettie à la seule condition de rencontrer à angle droit l'axe du système focal.

Démontrer que, dans cette nouvelle position, les deux systèmes sont polaires réciproques par rapport à un paraboloïde équilatère.

Si l'on désigne par c le paramètre des paraboles des sections principales de ce paraboloïde, par r la distance d'un point quelconque du système focal à l'axe et par θ l'angle que fait le plan focal de ce point avec l'axe, on a

$$r\tang\theta=c.$$

(G. Tarry.)

TABLE DES MATIÈRES DES EXERCICES.

Questions proposées.

Pages.
Questions 1686 à 1705 ..... 33*

Questions résolues.

Question 1257; par M. *Paul Terrier* 1*
Question 1266; par M. *E. Fauquembergue* 5*
Question 1267; par M. *Moret-Blanc* 8*
Question 1277; par M. *Moret-Blanc* 10*
Question 1287; par M. *Moret-Blanc* 11*
Question 1309; par M. *Camille de Polignac* 13*
Question 1319; par M. *Leinekugel* 16*
Question 1351; par M. *Moret-Blanc* 22*
Question 1372; par M. *Moret-Blanc* 22*
Question 1382; par M. *Moret-Blanc* 24*
Question 1563; par M. *J. Franel* 29*

21675 Paris — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
N8
v.54

Nouvelles annales
de mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

D BY
VN BROS
TORONTO,
ONT.